X

D 9

JUL 9

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel und H. Hasse

Band 171

Heft 3

Ausgegeben den 30. Juni 1934

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1934

Band 171. Heft 3.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Rédei, L., Über die Grundeinheit und die durch 8 teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe im quadratischen Zahlkörper	131
Franz, Wolfgang, Elementarteilertheorie in algebraischen Zahlkörpern	149
Schmidt, Friedrich Karl, Über die Kennzeichnung algebraischer Funktionenkörper durch ihren Regularitätsbereich	162
Grün, Otto, Über Substitutionsgruppen im Galoisfeld $G(p^f)$	170
Plamitzer, Anton, Erzeugnisse einer Klasse Cremonascher Verwandtschaften n. Grades zwischen Grundgebilden zweiter Stufe	173

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgendeinem Grunde Text-Änderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 75 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion ausschließlich unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg-Lahn, Behringweg 7.

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 10
Printed in Germany

Über die Grundeinheit und die durch 8 teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe im quadratischen Zahlkörper [1]).

Von *L. Rédei* in Mezötur (Ungarn).

Durchweg sei: R der Körper der rationalen Zahlen, k ein quadratischer Körper über R, D die Diskriminante von k, t die Anzahl der verschiedenen rationalen Primfaktoren von D, N das Zeichen für die Norm in k, ε eine Grundeinheit in k, e_{2^n} $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ die Anzahl der durch 2^n teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe [2]) von k.

A. Scholz hat mir vor kurzem einige seiner Sätze mitgeteilt [3]), die für $t = 2,\ 3$ durch 4-te Potenzrestsymbole $(\ )_4$ (in R) aus den Primfaktoren von D in gewissen Fällen auf $N(\varepsilon) = +1$ schließen; diese Sätze sind die ersten solcher Art. Dann haben wir gleichzeitig einen allgemeinen Satz für $N(\varepsilon) = +1$ in derselben Form aufgestellt und bewiesen. Dieser Satz stützt sich ebenfalls auf den Begriff der aus den Arbeiten II und I bekannten D-Zerfällungen. Nach diesem und dem Dirichlet-Tanoschen [4]) Satze bleiben nur wenige solche Fälle übrig, in denen sich das Vorzeichen von $N(\varepsilon)$ durch 2-te und 4-te

[1]) Der Inhalt dieser Arbeit ist enthalten in den folgenden zwei ungarischen Arbeiten: Über die durch 8 teilbaren Invarianten der Klassengruppe eines quadratischen Zahlkörpers, Math. u. Nat. Anz. d. Ung. Ak., **50** (1933) S. 195—218; die zweite Arbeit hat einen ähnlichen Titel wie die vorliegende, sie wird im nämlichen Anz. erscheinen.

Die zweite Frage des Titels wird hier unmittelbar im Anschluß an die folgende, inzwischen erschienene Arbeit betrachtet:

I. H. Reichardt, Zur Struktur der absoluten Idealklassengruppe im quadratischen Zahlkörper, dieses Journal **170** (1933), S. 75—82.

Außerdem werden die folgenden Arbeiten in Betracht kommen:

II. L. Rédei u. H. Reichardt, Die Anzahl der durch 4 teilbaren Invarianten der Klassengruppe eines beliebigen quadratischen Zahlkörpers, dieses Journal **170** (1933), S. 69—74.

III. L. Rédei, Arithmetischer Beweis des Satzes über die Anzahl der durch 4 teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe im quadratischen Zahlkörper, dieses Journal **171** (1934), S. 55—64.

IV. L. Rédei, Eine obere Schranke für die Anzahl der durch 4 teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe im quadratischen Zahlkörper, ebenda, S. 65—68.

Die letzten vier Arbeiten werden im folgenden mit I—IV zitiert. Daraus ist das genaue Studium von I und III erforderlich, die übrigen II und IV werden nur wenig berührt.

Die erste Frage aber, nämlich die der Einheiten, wird selbständig behandelt (vgl. [33])).

Die Hassesche Arbeit, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, Teil II, Jahresber. d. D. Math. Ver., VI. Ergänzungsb. (1930), wird mit Ber. II zitiert.

[2]) Im Sinne der Arbeit II.

[3]) Ich will Herrn A. Scholz auch hier meinen besten Dank für seine freundlichen Mitteilungen sagen, und auch Herrn H. Reichardt, der erst meine Aufmerksamkeit freundlich darauf gelenkt hatte.

[4]) F. Tano, Sur quelques théorèmes de Dirichlet, dieses Journal **105** (1889), S. 160—169. — Die Sätze dieser Arbeit sind mangelhaft und nicht klar genug gefaßt. Ich nahm schon vor längerer Zeit wahr, daß auch für diese Sätze die eigentliche Sprache die der D-Zerfällungen ist. Der eine Teil davon ist schon in der Arbeit II (S. 74) enthalten, der andere Teil wird hier bearbeitet. Auch A. Scholz hat für diesen zweiten Teil unabhängig von mir die nämlichen Resultate erhalten (vgl. unten).

Potenzrestsymbole nicht bestimmen läßt[4a]). — A. Scholz[5]) schloß mit Hilfe der Klassenkörpertheorie[6]), meine Methode ist elementar, ich benütze dabei nur das biquadratische Reziprozitätsgesetz in $R(i)$ ($i^2 = -1$)[7]). — Es bestehen merkwürdige Zusammenhänge mit den Zahlen e_{2n}. Vorläufig will ich davon folgendes bemerken: Ist $e_4 = 0$, so ist $N(\varepsilon) = -1$ (dies ist schon aus der Arbeit II bekannt); je größer e_4 ist, desto häufiger kommt $N(\varepsilon) = +1$ vor und zugleich desto seltener tritt der Fall ein, in welchem über das Vorzeichen von $N(\varepsilon)$ durch 4-te Potenzrestsymbole nicht zu entscheiden ist; insbesondere aber kommt ein solcher unbestimmter Fall nur dann vor, wenn die Klassenzahl durch 2^{t+1} teilbar ist, d. h. wenn $e_4 \geqq 2$ oder $e_8 \geqq 1$. Es scheint übrigens, daß auch bei wachsendem t sehr oft $e_4 \leqq 1$ bleibt, und somit — obwohl „großes t" eine erste Bedingung für „großes e_4" ist — ist es nicht richtig, zu denken, daß die vorigen Erscheinungen in einem unmittelbaren Zusammenhang mit großem t stehen.

Nach der H. Reichardtschen Arbeit I ist e_{2n} durch die D-Zerfällungen n. Art bestimmt (2. Satz). Im allgemeinen läßt sich die Frage, ob eine D-Zerfällung von der n. Art sei, nur nach einem irrationalen Rechenverfahren entscheiden (Definition II). Nur sind die Fälle $n = 1, 2$ sehr einfach. Ich bin in der ersten (ungarischen) Arbeit [1]) zu einer Definition der D-Zerfällungen 3. Art gekommen, die einfacher ist, als der zu $n = 3$ gehörige Fall der Reichardtschen Definition II. In der vorliegenden Arbeit wird sich jene Definition unmittelbar aus der Reichardtschen ergeben. Mit Hilfe der neuen Definition werde ich in einigen merkwürdigen Spezialfällen durch 4-te Potenzrestsymbole auf D-Zerfällungen 3. Art, d. h. auf e_8 schließen.

Ich werde mich erst mit der Frage nach e_8 beschäftigen (I. Teil), dann mit der Frage nach $N(\varepsilon)$ (II. Teil), denn, wie schon erwähnt, dienen die Tatsachen der Klassengruppe auch zur Beleuchtung des Verhaltens von $N(\varepsilon)$[8]).

I. Teil.

1. Es sei in diesem I. Teil eine D-Zerfällung 2. Art D', D'' vorgegeben, und es soll dabei — wenn nichts anderes gesagt wird — D'' ungerade sein; letzteres ist nach einem eventuellen Vertauschen der Elemente D', D'' stets erreichbar. Es bedeute a, b, c eine be-

[4a]) Natürlich ist die Anzahl der unerledigten Fälle unendlich groß.

[5]) Die A. Scholzsche Arbeit darüber wird in der Math. Zeitschr. erscheinen.

[6]) Dies bezieht sich auch auf die Dirichlet-Tanoschen Sätze, und somit bietet das A. Scholzsche Verfahren auch in diesem Stück wesentlich Neues.

[7]) Insbesondere bei den Dirichlet-Tanoschen Sätzen wende ich die Dirichletsche Methode (diese ist auch elementar und verläuft in R, vgl. [4])) mit geringer Modifikation an. Ein diesem ähnliches Verfahren wird auch bei der Behandlung der anderen Frage dieser Arbeit bei (10) und (10′) Anwendung finden. — Ich bemerke hier ausdrücklich, daß die Dirichlet-Tanoschen Sätze nicht nur eine elegantere Form erhalten werden, sondern daß durch diese neue Form auch dieser Satz in Zusammenhang mit der Klassengruppe gebracht werden wird (vgl. die oben folgenden Ausführungen).

[8]) Ich habe die Vermutung, daß der Zusammenhang beider Fragen viel enger sei, als bisher aufgeklärt wurde. Insbesondere bemerke ich schon hier, daß bei den zwei Untersuchungen (vgl. den V. und VI. Satz) betreffend $N(\varepsilon)$ gewisse Nebenresultate entstanden, die ich aber zur Entscheidung über das Vorzeichen von $N(\varepsilon)$ (vgl. [35]) nicht ausnützen konnte. Dazu sei noch folgendes bemerkt: Wie schon gesagt, werden sich alle Tatsachen, die sich auf $N(\varepsilon)$ beziehen, hier arithmetisch herausstellen, die Zusammenhänge mit e_4, e_8 sind aber teilweise Tatsachen der Funktionentheorie, da die Bestimmung von e_{2n} im allgemeinen bisher nur mit Hilfe der Klassenkörpertheorie möglich geworden ist. Doch mit Rücksicht darauf, daß e_4 in der Arbeit III arithmetisch bestimmt wurde, ferner in einer Arbeit von B. A. Wenkov (s. in der Arbeit III) ein beträchtlicher Teil der Dirichletschen Klassenzahlformeln arithmetisch bestätigt wurde, halte ich es endlich für wahrscheinlich, daß der mit der Frage nach $N(\varepsilon)$ zusammenhängende Teil der vorliegenden Resultate für e_8 (d. h. die Sätze II und III), sich elementar aus den Klassenzahlformeln erhalten läßt (einige Beispiele habe ich vor kurzem in einer ungarischen Arbeit, Über die Weiterführung eines zahlentheoretischen Satzes von Gauß, Anz. d. Ref. Gimn. in Mezötur (1932/33) betrachtet); so halte ich es für möglich, daß auch die erwähnten Zusammenhänge sich arithmetisch beweisen lassen.

stimmte, bekanntlich vorhandene Lösung von

$$a^2 = b^2 D' + c^2 D'' \tag{1}$$

mit den Bedingungen: a, b, c sind von Null verschiedene ganze rationale Zahlen; $2 \mid b$; a, bD', cD'' sind paarweise teilerfremd;

$$\alpha = a + b\sqrt{D'} \equiv 1 \pmod 4 , \tag{2}$$

d. h. je nachdem $2 \nmid D$ oder $2 \mid D$:

$$a + b \equiv 1 \pmod 4 \qquad (2 \nmid D) , \tag{2'}$$

$$a \equiv 1 \pmod 4 \qquad (2 \mid D) . \tag{2''}$$

Letztere Bedingungen lassen sich durch geeignete Wahl des Vorzeichens von a stets erreichen.

Es sei $\mathfrak{E} = E', E''$ eine beliebige D-Zerfällung. Ich setze dann für einen beliebigen Primidealteiler $\mathfrak{p}$ (in einem beliebigen Körper) von D, vorläufig nur formal:

$$\left(\frac{x\mathfrak{E}}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{xE'}{\mathfrak{p}}\right) \text{ oder } \left(\frac{xE''}{\mathfrak{p}}\right) ,$$

je nachdem $\mathfrak{p} \mid E''$ oder $\mathfrak{p} \mid E'$ ist.

Ich benütze noch die Abkürzung $x^r \| y$, die bedeuten soll, daß $x^r \mid y$, $x^{r+1} \nmid y$. Nach der Definition II der Arbeit I ist D', D'' von der 3. Art dann und nur dann, wenn es ein E' gibt, so daß nie in $R(\sqrt{D'})$ $\left(\frac{\alpha E'}{\mathfrak{p}}\right) = -1$ stattfindet; dabei hat α die Bedeutung, wie in (2), E' ist eine Diskriminantenzahl, $E' \mid D$, oder $E' = 1$, $\mathfrak{p}$ durchläuft alle Primideale von D in $R(\sqrt{D'})$, und das Symbol $(-)$ (im multiplikativen Sinn!) ist dasselbe Symbol im Körper $R(\sqrt{D'})$, wie in der Arbeit I (S. 81). Indem ich stets mit p die positive Primzahl bezeichne, für die $\mathfrak{p} \mid p$, und indem ich $E'E'' = D$, $\mathfrak{E} = E', E''$, $\alpha' = a - b\sqrt{D'}$ setze, unterscheide ich die Fälle:

1. $p \mid D'$, $p \neq 2$.

Es ist nach (2) $\left(\frac{\alpha E'}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{aE'}{\mathfrak{p}}\right) \neq 0$. Andererseits ist $\left(\frac{D}{\mathfrak{p}}\right) = 1$, da $D = (\sqrt{D'})^2 D''$, und $\left(\frac{D''}{\mathfrak{p}}\right) = 1$, da D', D'' eine D-Zerfällung 2. Art ist. Somit ist $\left(\frac{aE'}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{aE'D}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{aE''}{\mathfrak{p}}\right)$, d. h. $\left(\frac{\alpha E'}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{a\mathfrak{E}}{\mathfrak{p}}\right)$, wobei das letztere ( ) schon das gewöhnliche 2-te Potenzrestsymbol in $R(\sqrt{D'})$ ist. Da $\mathfrak{p}$ vom ersten Grade ist, so ist $\left(\frac{\alpha E'}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{a\mathfrak{E}}{p}\right)$, wobei das letztere ( ) das Kroneckersche Symbol ist.

2. $p \mid D'$, $p = 2$.

Es ist r, die Ordnung von 2 bezüglich $\mathfrak{p}$, gleich 2, d. h. $\mathfrak{p}^2 \| 2$, somit ist nach (2) $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right) \neq 0$. Da wieder $\left(\frac{D}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ ist, ist $\left(\frac{E'}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{E''}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{p}}\right) \neq 0$, denn eine der Zahlen E', E'' ist $\equiv 1 \pmod 4$. Es ist also $\left(\frac{\alpha E'}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\alpha\mathfrak{E}}{\mathfrak{p}}\right) \neq 0$. Da $\mathfrak{p}^{2r+1} = \mathfrak{p}^5 = 4\mathfrak{p}$, so ist nach (2) $\alpha \equiv a$ bzw. $a + 2b \pmod{\mathfrak{p}^{2r+1}}$, je nachdem $D \equiv 8$ bzw. $12 \pmod{16}$ ist. Entsprechend ist also $\left(\frac{\alpha E'}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{a\mathfrak{E}}{2}\right)$ bzw. $\left(\frac{(a+2b)\,\mathfrak{E}}{2}\right)$.

3. $p \mid D''$, $p \nmid E'$.

Es ist $\left(\frac{\alpha E'}{\mathfrak{p}}\right) \neq 0$ dann und nur dann, wenn $\mathfrak{p} \nmid \alpha$, da nach (1) leicht ersichtlich $\mathfrak{p}$ in α in einer ungeraden Potenz oder gar nicht aufgeht. Ist dies der Fall, so ist $\mathfrak{p} \mid \alpha,'$ und somit ist $\left(\frac{\alpha E'}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{(\alpha + \alpha')\,E'}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{2aE'}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{2aE'}{p}\right) = \left(\frac{2a\mathfrak{E}}{p}\right)$.

4. $p \mid D'', p \mid E'$.

Es ist $\left(\frac{\alpha E'}{\mathfrak{p}}\right) \neq 0$ dann und nur dann, wenn $\mathfrak{p} \mid \alpha$, da $\mathfrak{p} \| E'$. Ist dies der Fall, so folgt, da nach (1) $\left(\frac{\alpha\alpha' D''}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{c^2 D''^2}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ und auch $\left(\frac{D'}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ ist:

$$\left(\frac{\alpha E'}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\alpha E' \alpha\alpha' D'' D'}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\alpha' E' D}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\alpha' E''}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{(\alpha' + \alpha) E''}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{2aE''}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{2a\mathfrak{S}}{p}\right).$$

Dabei ist in allen Fällen 1.—4. darauf zu achten, daß es für jedes p ein und nur ein $\mathfrak{p}$ gibt, für das $\left(\frac{\alpha E'}{\mathfrak{p}}\right) \neq 0$. Daraus ergibt sich der folgende

I. Satz. *Die D-Zerfällung 2. Art D', D'' ist dann und nur dann von der 3. Art, wenn es eine D-Zerfällung $\mathfrak{S}$ gibt mit*

$$\left(\frac{2a\mathfrak{S}}{p''}\right) = 1, \quad \left(\frac{a\mathfrak{S}}{p'}\right) = 1 \quad (\textit{für } D \equiv 1 \pmod 4 \textit{ oder } D \equiv 8 \pmod{16}) \tag{3}$$

bzw.

$$\left(\frac{2a\mathfrak{S}}{p''}\right) = 1, \quad \left(\frac{a\mathfrak{S}}{p'}\right) = 1 \ (p' \neq 2), \quad \left(\frac{(a+2b)\,\mathfrak{S}}{2}\right) = 1 \tag{3'}$$

$$(\textit{für } D \equiv 12 \pmod{16}),$$

wobei $p^{(j)}$ sämtliche rationale Primteiler von $D^{(j)}$ bedeutet ($j = 1, 2$) [9].

2. Diesen Satz werde ich gleich auch in zwei anderen Formen ausdrücken. Dazu benütze ich die Matrix M_D aus der Arbeit III (S. 57) und die weitere Matrix $M_D(a)$, die aus der vorigen durch Hinzufügung einer letzten Spalte entsteht:

$$(4)\quad M_D(a) = \left|\begin{array}{cccccccc}
\left(\frac{D}{p_1}\right) & \left(\frac{p_2}{p_1}\right) & \dots & \left(\frac{p_j}{p_1}\right) & \dots & & & \\
\left(\frac{p_1}{p_2}\right) & & & & & & & \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & & & & & \\
\left(\frac{p_1}{p_j}\right) & \dots & \left(\frac{p_{j-1}}{p_j}\right) & \left(\frac{D}{p_j}\right) & \left(\frac{p_{j+1}}{p_j}\right) & \dots & \left(\frac{p_{t-1}}{p_j}\right) & \left(\frac{2a}{p_j}\right) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & & & & & \\
\left(\frac{p_1}{p_l}\right) & & & & & & & \left(\frac{a}{p_l}\right) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & & & & & \\
\left(\frac{p_1}{p_{t-1}}\right) & & & & & \left(\frac{D}{p_{t-1}}\right) & & \\
\left(\frac{p_1}{p_t}\right) & & & & & \left(\frac{p_{t-1}}{p_t}\right) & \left(\frac{a}{p_t}\right), & \left(\frac{a+2b}{2}\right)
\end{array}\right| \begin{array}{l} \} D'' \\ \\ \\ \} D' \end{array}$$

Dabei sind $p_1, p_2, \dots, p_t$ so verstanden, wie in der Arbeit III, d. h. sie sind die verschiedenen rationalen Primteiler von D; $p_t = 2$, wenn $2 \mid D$; $p_j \equiv 1 \pmod 4$, wenn $2 \neq p_j$. Weiter

[9]) Es hindert nichts, im Falle $D \equiv 12 \pmod{16}$ sogar $4 \mid b$ voraussetzen, und dann geht (3') in (3) über. Doch ist für praktische Zwecke die obige Form des Satzes bequemer. — Es ist leicht zu zeigen, daß der I. Satz auch dann richtig bleibt, wenn man „D-Zerfällung $\mathfrak{S}$" durch „Lösung von (1)" ersetzt und gleichzeitig in (3), (3') $\mathfrak{S} = 1, D$ setzt; letzteres ist gleichbedeutend mit dem Streichen von $\mathfrak{S}$ aus (3), (3').

sind hier die Bezeichnungen so gewählt, daß in der Folge $p_1, p_2, \ldots, p_t$ die Primteiler von D'' denen von D' vorangehen — diese neue Festsetzung widerspricht der vorigen nicht, denn bei $2 \mid D$ ist $2 \mid D'$ und $p_t = 2$. Zugleich gehen also die zu den Primteilern von D gehörigen Zeilen [10]) von $M_D(a)$ den übrigen voran (den zu den Primteilern von D gehörigen). Als die letzte Spalte in $M_D(a)$ ist (zu M_D) die Zahlenfolge $\left(\frac{2a}{p_1}\right), \ldots, \left(\frac{2a}{p_s}\right)$; $\left(\frac{a}{p_{s+1}}\right), \ldots, \left(\frac{a}{p_t}\right)$ hinzugefügt, wobei für einen Augenblick s die Anzahl der Primteiler von D'' bedeutet; dabei ist aber im Falle $D \equiv 12 \pmod{16}$ das letzte Element durch $\left(\frac{a+2b}{p_t}\right) = \left(\frac{a+2b}{2}\right)$ ersetzt. *Ich stelle nocheinmal fest, daß M_D die Matrix ist, die aus* (4) *nach dem Wegschaffen der letzten Spalte entsteht.*

Ist $\mathfrak{S} = E', E''$ eine D-Zerfällung und ist z. B. $p_t \mid E'$, so verstehe ich unter „den zu $\mathfrak{S}$ gehörigen Spalten" die zu E'' gehörigen. Es gilt dann:

(5) *Das Produkt* [11]) *der zu $\mathfrak{S}$ gehörigen Spalten von M_D ist* $\left(\frac{\mathfrak{S}}{p_j}\right)$ $(j = 1, 2, \ldots, t)$.

Ich beweise den

I'. Satz. *Die D-Zerfällung 2. Art D', D'' ist dann und nur dann von der 3. Art, wenn sich in $M_D(a)$ ebenso viel Einheitsmengen* [11]) *von Zeilen bilden lassen wie in M_D.* Ist dies der Fall, so entstehen leicht ersichtlich die ersterwähnten Einheitsmengen aus den letzteren, wenn jede Zeile von M_D zur entsprechenden von $M_D(a)$ ergänzt wird.

Das System der linken Zahlen in (3) bzw. (3') ist nämlich das Produkt der zu $\mathfrak{S}$ gehörigen Spalten und der letzten Spalte von $M_D(a)$. Ist D', D'' von der 3. Art, so bilden nach dem I. Satze diese Spalten eine Einheitsmenge. Da diese auch die letzte Spalte enthält, so lassen sich in $M_D(a)$ genau zweimal so viel Einheitsmengen von Spalten herstellen wie in M_D. Nach der Arbeit III, **7.** (S. 59) sind also die Anzahlen der Einheitsmengen von *Zeilen* in beiden Matrizen einander gleich.

Mit Hilfe der Gruppe der Mengen von Zeilen (Arbeit III, S. 60) läßt sich der jetzt bewiesene Satz auch in der folgenden Form ausdrücken:

I.'' Satz. *Die D-Zerfällung 2. Art D', D'' ist dann und nur dann von der 3. Art, wenn die unabhängigen Einheitsmengen von Zeilen von M_D auch in $M_D(a)$ Einheitsmengen sind* (selbstverständlich nach der Ergänzung der Zeilen, wie oben) [12]).

Der besseren Orientierung halber merke ich aus der Arbeit III (S. 60, **b.**) an:

(6) *Es gibt genau $e_4 + 1$ unabhängige Einheitsmengen von Zeilen in M_D.*

Es soll hier eine Feststellung über die letzte Spalte von $M_D(a)$ Platz finden, daß nämlich (das Produkt der in der letzten Spalte enthaltenen Elemente [13]) der zu D ge-

---

[10]) Dies ist so zu verstehen wie in der Arbeit III (S. 57) für M_D. Im folgenden werden in der Redeweise „die zu d gehörigen Zeilen" auch mehrfache Primteiler in d zugelassen (die auch nachher nur aus den Primteilern von D zu nehmen sind), und ich verstehe darunter die Menge der Zeilen, die zu einem solchen p gehören, für welches das x aus $p^x \mid\mid d$ ungerade ist. Z. B. im Falle $D \equiv 12 \pmod{16}$ wird die Menge der zu D gehörigen Zeilen die letzte (zu $p_t = 2$ gehörige) Zeile nicht enthalten. — Alles ist auch für die Spalten zu verstehen. Es sei ausdrücklich bemerkt, daß die zu p_t gehörige Spalte von $M_D(a)$ die letzte Spalte von $M_D(a)$ ist.

[11]) Vgl. die Arbeit III (S. 57). — (5) ist schon dort (S. 59) vorgekommen, und ist auch unmittelbar leicht ersichtlich.

[12]) Man bemerkt, daß der I'. und der I''. Satz wesentlich von dem I. Satz abweichen. Nach diesem muß nämlich die letzte Spalte von $M_D(a)$ mit dem Produkt einiger früherer Spalten übereinstimmen, damit D', D'' von der 3. Art sei.

[13]) Diese sind alle Elemente der letzten Spalte oder alle mit Ausnahme des letzten Elementes, je nachdem D unter (3) oder (3') fällt.

hörigen Zeilen von $M_D(a)$):

(7) $\left(\frac{a}{D'}\right)\left(\frac{2a}{D''}\right) = 1$ *oder* Sgn a, *je nachdem* $D < 0$ *oder* $D > 0$ *ist*.

Dabei ist Sgn a durch $a = |a| \cdot \text{Sgn}\, a$ erklärt ($a \neq 0$).

Es ist nämlich nach (1) $\left(\frac{-D}{a}\right) = 1$, woraus nach (2'), (2'') und nach dem quadratischen Reziprozitätsgesetz folgt:

$$\left(\frac{a}{D}\right)(-1)^{\frac{a-1}{2}\frac{D_0+1}{2}}(\text{Sgn}\, a)^{\frac{\text{Sgn}\, D+1}{2}} = 1,$$

wobei für einen Augenblick $D = 2^x D_0$, $2^x \| D$ gesetzt ist. Der zweite Faktor der linken Seite ist $(-1)^{\frac{b}{2}}$ oder 1, je nachdem $2 \nmid D$ oder $2 \mid D$ ist, nach (2') bzw. (2''). In allen Fällen ist also dieser Faktor wegen (1) gleich $\left(\frac{D''}{2}\right)$, also gleich $\left(\frac{2}{D''}\right)$. Daraus folgt (7).

3. Ich werde die folgenden Aussagen mit (α), (β), (γ) zitieren:

(α) $D < 0$ *oder* D *ist das Produkt von positiven Fundamentaldiskriminanten* [14]).

(β) $e_4 = 1$ *und* D', D'' *bezeichnet die dann vorhandene einzige eigentliche* [15]) *D-Zerfällung 2. Art.*

(γ) *Für* D' *und* D'' *besteht* (α) [16]).

Es werden Untersuchungen folgen, teils unter den Voraussetzungen (α), (β), (γ), teils unter anderen (geringeren) Voraussetzungen.

Aus dem Reziprozitätsgesetz folgt sofort:

(8) *Bestehen* (α), (γ) [17]), *so bilden die zu* $D^{(j)}$ ($j = 1, 2$) *gehörigen Zeilen von* M_D *eine Einheitsmenge.*

Von nun an sollen (α), (β), (γ) bestehen, wenn nichts anderes gesagt wird. Dann nenne ich den Fall $D' = -4$, $D'' = -\frac{1}{4}D$ *unregelmäßig*, die übrigen Fälle regelmäßig. Infolge (β) ist nur $e_8 = 0$ oder 1 möglich, und ich werde durch explizite Formeln mit Hilfe von Symbolen $(\ )_4$ entscheiden, welcher dieser Fälle eintritt.

Wegen $e_4 = 1$ gibt es nach (6) genau 2 unabhängige Einheitsmengen von Zeilen in M_D. Solche Mengen bilden nach (8) im regelmäßigen Falle die zu D' und die zu D'' gehörigen Zeilen. Nach dem I''. Satze folgt also:

A. *Im regelmäßigen Falle ist* D', D'' *von der* 3. *Art dann und nur dann, wenn*

(9) $$\left(\frac{a}{D'}\right) = 1, \quad \left(\frac{2a}{D''}\right) = 1$$ [18]).

Ich beweise jetzt nach Dirichlets [19]) Vorgang die folgenden Zusammenhänge betreffend (1), bei denen ich (α), (β), (γ) nicht voraussetze [20]):

---

[14]) Ich nenne $8, -8, -4, p$ (p rationale Primzahl, $p \equiv 1 \pmod 4$) Fundamentaldiskriminanten. — Bekanntlich ist bei $D > 0$ das Bestehen von (α) notwendig für $N(\varepsilon) = -1$. — Selbstverständlich ist die Redeweise „für D' besteht (α)" so zu erklären, daß D' statt D der Voraussetzung (α) genügt.

[15]) D. h. $D' \neq 1$, $D'' \neq 1$.

[16]) (α) ist eine Folgerung von (γ), denn D', D'' können nicht beide < 0 sein (vgl. in der Arbeit II, S. 71, Anm. [14])). — Ohne (β) soll D', D'' wieder eine beliebige D-Zerfällung 2. Art bezeichnen.

[17]) Wie schon bemerkt, folgt (α) aus (γ), und somit erwähne ich neben dem Bestehen von (γ) auch das Bestehen von (α) nur der größeren Klarheit halber.

[18]) Im Falle $D < 0$ ist nach (7) die eine Gleichung von (9) eine Folge der anderen.

[19]) Vgl. z. B. [4]).

[20]) Ich hätte also dies sehr wohl schon in **1.** vornehmen können.

(10) *Ist* $D' > 0$ *und besteht für* D' (α), *so ist* $\left(\frac{a}{D'}\right) = \left(\frac{D''}{D'}\right)_4$.

(10′) „ $D'' > 0$ „ „ „ D'' „ „ „ $\left(\frac{2a}{D''}\right) = \left(\frac{D'}{D''}\right)_4$ [21]).

Das Zeichen $(\,)_4$ *werde ich in zweierlei Bedeutung benützen*, und diesbezüglich will ich alles schon hier feststellen:

Sind α, β ganze Zahlen in $R(i)$ $(i^2 = -1)$, so bezeichne ich das übliche 4-te Potenzrestsymbol $\left(\frac{\alpha \mid R(i)}{\beta}\right)_4$ (Ber. II, S. 49—50) kurz mit $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_4$. *Der Bequemlichkeit halber dehne ich die Erklärung auch für den Fall* „$\beta = 1 + i$, α *ganz rational,* $\alpha \equiv 1 \pmod 4$“ *aus, und es sei dann* $\left(\frac{\alpha}{1+i}\right)_4 = i^{\frac{\alpha-1}{4}}$. Dabei soll immer $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_4 \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)_4 = \left(\frac{\alpha}{\beta\gamma}\right)_4$ bestehen.

Es sei N_i das Zeichen für die Norm in $R(i)$. Ist α rational, β das Produkt von Primidealen ersten Grades in $R(i)$, und ist $\left(\frac{\alpha}{q}\right) = 1$ für jeden rationalen Primteiler q von $y = N_i(\beta)$, so setze ich $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_4 = \left(\frac{\alpha}{y}\right)_4$. — Das Symbol $\left(\frac{x}{y}\right)_4$ ist also für solche ganze rationale Zahlen x, y erklärt, für die folgendes gilt: die ungeraden positiven Primfaktoren von y sind alle von der Gestalt $4m+1$; x ist quadratischer Rest in R nach jedem ungeraden Primteiler von y; im Falle $2 \mid y$ ist $x \equiv 1 \pmod 4$. — Da $\left(\frac{x}{2}\right)_4 = i^{\frac{x-1}{4}}$, so ist $\left(\frac{x}{y}\right)_4$ bei $2 \mid y$ nicht immer rational. In den Fällen „$2 \nmid y$“ und „$2 \mid y$, $x \equiv 1 \pmod 8$“ hat $\left(\frac{x}{y}\right)_4$ $(= \pm 1)$ die übliche Bedeutung — insbesondere, ist q eine Primzahl, so ist $\left(\frac{x}{q}\right)_4 = 1$ dann und nur dann, wenn x ein 4-ter Potenzrest in $R \pmod q$ bzw. $\pmod{16}$ ist, letzteres im Falle $q = \pm 2$ (dann ist also $x \equiv 1 \pmod{16}$).

Es seien nunmehr zunächst die Voraussetzungen von (10) befriedigt. Wegen (1) ist $a^2 \equiv c^2 D'' \pmod{4D'}$. Ich wähle für einen Augenblick das sonst beliebige Vorzeichen von c so, daß $c \equiv 1 \pmod 4$ wird. Ist p eine rationale Primzahl und $p \mid D'$, so folgt (gleich für $2 \mid p$ und für $2 \nmid p$)

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a^2}{p}\right)_4 = \left(\frac{c^2 D''}{p}\right)_4 = \left(\frac{c}{p}\right)\left(\frac{D''}{p}\right)_4 = \left(\frac{p}{c}\right)\left(\frac{D''}{p}\right)_4,$$

und nach Multiplizieren

$$\left(\frac{a}{D'}\right) = \left(\frac{D'}{c}\right)\left(\frac{D''}{D'}\right)_4.$$

Der erste Faktor rechts ist nach (1) gleich 1, und somit folgt (10).

Es seien ferner die Voraussetzungen von (10′) befriedigt. Wegen (1) ist $a^2 \equiv b^2 D' \pmod{D''}$, und es folgt ähnlich

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)\left(\frac{D'}{p}\right)_4,$$

wobei $p \mid D''$, p Primzahl ist. Ist für einen Augenblick $b = 2^x b_0$, $2^x \parallel b$ $(x \geqq 1)$, so folgt

[21]) Bestehen (10) und (10′) gleichzeitig, so ist auch $D > 0$, und es folgt nach (7)

$$\left(\frac{D'}{D''}\right)_4 \left(\frac{D''}{D'}\right)_4 = \operatorname{Sgn} a,$$

ein Zusammenhang, der unbeschränkt vorhanden ist, wenn die linke Seite definiert ist. Dies gilt auch dann, wenn D', D'' die uneigentliche D-Zerfällung ist, wie meistens unsere Festsetzungen, wenn nichts anderes gesagt wird.

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right)^x \left(\frac{p}{b_0}\right) \left(\frac{D'}{p}\right)_4,$$

also

$$\left(\frac{a}{D''}\right) = \left(\frac{2}{D''}\right)^x \left(\frac{D''}{b_0}\right) \left(\frac{D'}{D''}\right)_4.$$

Der zweite Faktor rechts ist nach (1) gleich 1 und damit

$$\left(\frac{2a}{D''}\right) = \left(\frac{2}{D''}\right)^{x-1} \left(\frac{D'}{D''}\right)_4.$$

Entweder ist $x = 1$, oder $x \geqq 2$ und im letzteren Falle nach (1) $D'' \equiv 1 \pmod 8$ — in beiden Fällen hat also der erste Faktor rechts den Wert 1. Somit ist auch (10′) bewiesen.

Nach dem 2. Satze in der Arbeit I, nach **A.**, (10), (10′) gilt der

II. Satz. *Bestehen* (α), (β), (γ) (S. 136), *und* (*regelmäßiger Fall!*) *ist die dann vorhandene einzige D-Zerfällung* 2. *Art* D', D'' *nicht gleich* -4, $-\frac{1}{4}D$, *so ist dazu, daß* D', D'' *von der* 3. *Art, d. h. daß* e_8 *gleich* 1 *sei, notwendig und hinreichend, daß von den Gleichungen*

$$\left(\frac{D'}{D''}\right)_4 = 1, \quad \left(\frac{D''}{D'}\right)_4 = 1 \tag{11}$$

für ein positives D beide, für ein negatives D die eine — und zwar die, die einen positiven „Nenner" hat — erfüllt sind [22]).

Zum Beweis des Satzes ist nach dem Vorhergehenden nur zu bemerken, daß im Falle $D < 0$ nach (7) eine Gleichung aus (9) sich streichen läßt — es ist die beizubehalten, für die (10) oder (10′) anwendbar ist [23]).

4. Für das weitere zeige ich zunächst:

B. *Im unregelmäßigen Falle gibt es ein Zahlenpaar* d', d'' *aus ganzen rationalen Zahlen mit folgenden Eigenschaften:* $d'd'' = -\frac{1}{4}D(=n)$ *und*

$$\left(\frac{d'}{p''}\right) = 1, \quad \left(\frac{d''}{p'}\right) = 1 \text{ [24])} \qquad (1 < d', d''), \tag{12}$$

oder

$$\left(\frac{2d'}{p''}\right) = 1, \quad \left(\frac{2d''}{p'}\right) = 1 \qquad (1 \leqq d', d''), \tag{12′}$$

wobei p', p'' *die rationalen Primfaktoren von* d' *bzw.* d'' *durchlaufen. Es gibt — von der Reihenfolge abgesehen — nur ein einziges solches Zahlenpaar; ich nenne es kurz das Zahlenpaar* d', d''. *Dies befriedigt nur die eine der Gleichungen* (12), (12′). — *Entsprechend bilden*

---

[22]) Mit anderen Worten: aus (11) ist nur der sinnvolle Teil beizubehalten.

[23]) Ich bemerke hier, daß der sich auf $D > 0$ beziehende Teil von (7) für unsere Hauptzwecke entbehrlich ist. Neben dem in [21]) Bemerkten folgt aus diesem Teil von (7), daß im Falle $D > 0$ (natürlich nur wenn (α) besteht) $a > 0$ sein muß, damit D', D'' von der 3. Art sei, und dies ist — wie wir sehen werden — auch dann richtig, wenn $e_4 = 1$ (d. h. (β)) nicht vorausgesetzt wird.

[24]) Ich bemerke: wenn (12) besteht, ist $\left(\frac{d'}{2}\right) = -1$, und ähnlich $\left(\frac{d''}{2}\right) = -1$. Im Falle $\left(\frac{d'}{2}\right) = 1$ wäre nämlich leicht ersichtlich d', $-4d''$ eine D-Zerfällung 2. Art, die von 1, D und von -4, n verschieden ist. Beiläufig soll erwähnt werden, daß — nochmals im Falle des Bestehens von (12) — d', d'' eine D-Zerfällung 2. Art zur Diskriminante $d'd'' = n = -\frac{1}{4}D$ ist.

die zu d' bzw. $2d'$ gehörigen Zeilen von M_D eine Einheitsmenge. — Wie hier wird auch nachher im unregelmäßigen Falle $-\frac{1}{4}D\ (>0)$ mit n bezeichnet werden, das ist also das Produkt von verschiedenen positiven Primzahlen der Gestalt $4m+1$.

Nach (6) gibt es nämlich genau 2 unabhängige Einheitsmengen von Zeilen von M_D. Eine Einheitsmenge bilden nach (8) die zu $D''=n$ gehörigen Zeilen, es muß also noch eine vorhanden sein, die von der vorigen und der leeren Menge verschieden ist. Gehören die Zeilen jener Menge zur Zahl $f\ (>0)$, so läßt sich $f \mid 2n$, $f \neq 1$, $f \neq n$ voraussetzen. Ich setze $f=d'$ bzw. $f=2d'$, je nachdem $2 \nmid f$ oder $2 \mid f$ ist, und es sei immer $d'd''=n$. Dann besteht (12) bzw. (12′) nach dem Reziprozitätsgesetz. Beide können nicht bestehen, denn dann bilden die zu den Zahlen D'', d', $2d'$ gehörigen Zeilen von M_D drei unabhängige Einheitsmengen. Aus ähnlichen Gründen kann nicht noch ein anderes Zahlenpaar d', d'' vorhanden sein. Damit ist **B.** bewiesen.

Also bilden die zu $D''=n$ und zu d' bzw. $2d'$ gehörigen Zeilen von M_D 2 unabhängige Einheitsmengen, und somit gilt nach dem I. Satze, nach (6), (7) und (4) (insbesondere ist nach (7) $\left(\frac{2a}{D''}\right)=1$, folglich bilden die zu D'' gehörigen Zeilen von $M_D(a)$ stets eine Einheitsmenge):

B.′ *Im unregelmäßigen Falle ist D', D'' von der 3. Art dann und nur dann, wenn*

$$\left(\frac{2a}{d'}\right)=1 \tag{13}$$

bzw.

$$\left(\frac{2a}{d'}\right)\left(\frac{a+2b}{2}\right)=1 \tag{13}$$

ist, je nachdem das Zahlenpaar d', d'' (12) oder (12′) erfüllt.

5. Die hier folgenden Betrachtungen beziehen sich auf eine beliebige Zahl $n=p_1p_2\dots p_r$, die das Produkt von verschiedenen positiven Primzahlen $p_j (j=1,2,\dots,r)$ ist, die alle von der Gestalt $4m+1$ sind.

Bekanntlich lassen sich die ganzen rationalen Zahlen a_j, b_j so bestimmen, daß

$$p_j=a_j^2+b_j^2 \qquad (j=1,2,\dots,r), \tag{14}$$

$2 \mid b_j$ und

$$a_j+b_j \equiv 1 \pmod 4 \tag{15}$$

stattfinden; zum Erfülltsein von (15) braucht nur das Vorzeichen von a_j geeignet gewählt werden.

Im Körper $R(i)$ ist

$$\mathfrak{p}_j=a_j+b_ji \tag{16}$$

ein primärer Primidealfaktor von p_j; eine ganze Zahl α von $R(i)$ soll primär heißen, wenn $\alpha \equiv 1 \pmod{(1-i)^3}$. Ich setze noch

$$\mathfrak{n}=\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\dots\mathfrak{p}_r=A+Bi\,(=(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)\dots(a_r+b_ri)). \tag{17}$$

Dann ist auch $A+Bi$ primär, d. h. $2 \mid B$ und

$$A+B \equiv 1 \pmod 4. \tag{18}$$

Durch Normenbildung ergibt sich:

$$n=A^2+B^2\ ^{25}). \tag{19}$$

---

[25]) Schreibt man (19) in der Form $A^2=-4\left(\frac{B}{2}\right)^2+n$, so sieht man, daß — bei der alten Bedeutung von $n\left(r=t-1,\ n=-\frac{1}{4}D=D'' \equiv 1 \pmod 8\right)$ — $a=A$, $b=\frac{B}{2}$, $c=1$ eine Lösung von (1) ist, für die auch $2 \mid b$ und (2″) stattfinden, denn bei $n \equiv 1 \pmod 8$ ist $4 \mid B$ und dabei besteht auch (18).

Die bezweckten Festsetzungen beziehen sich auf die Zahlen A und B. Zu diesem Zwecke führe ich das Symbol

$$(\alpha, \beta)_4 = \left(\frac{N_i(\alpha)}{\beta}\right)_4 \left(\frac{N_i(\beta)}{\alpha}\right)_4^{-1} \tag{20}$$

ein, in welchem α, β ganze Zahlen in $R(i)$ sind, $(\alpha, \beta) = 1$, und N_i — wie vorher — das Zeichen für die Norm in $R(i)$ ist.

Es gilt $(\alpha, \beta)_4 = (\beta, \alpha)_4^{-1}$, $(\alpha\beta, \gamma)_4 = (\alpha, \gamma)_4 \cdot (\beta, \gamma)_4$. Daraus folgt leicht

$$\left(\alpha_1, \frac{\omega}{\alpha_1}\right)_4 \left(\alpha_2, \frac{\omega}{\alpha_2}\right)_4 \ldots \left(\alpha_s, \frac{\omega}{\alpha_s}\right)_4 = \left(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_s, \frac{\omega}{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_s}\right)_4, \tag{21}$$

wenn beide Seiten sinnvoll sind (d. h. wenn $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_s \mid \omega$ und $\left(\alpha_j, \frac{\omega}{\alpha_j}\right) = 1 (j = 1, 2, \ldots, s)$).

Die zu beweisenden Tatsachen lauten:

$$\left(\frac{A+B}{2}\right) = \left(\frac{2i}{\mathfrak{n}}\right)_4, \tag{22}$$

$$\left(\frac{A}{d'}\right) = (\mathfrak{d}', \mathfrak{d}'')_4, \tag{23}$$

wobei $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{d}''$ ganze primäre Ideale in $R(i)$ sind, $\mathfrak{d}'\mathfrak{d}'' = \mathfrak{n}$, $N_i(\mathfrak{d}') = d'$, und wieder $(—)$ das Kroneckersche Symbol bedeutet.

Es folgt nämlich wegen $\mathfrak{n} = A + Bi$: $\left(\frac{i}{\mathfrak{n}}\right)_4 = i^{\frac{A-1}{2}+B}$ und $\left(\frac{2}{\mathfrak{n}}\right)_4 = i^{-\frac{B}{2}}$ [26]). Dann ist $\left(\frac{2i}{\mathfrak{n}}\right)_4 = i^{\frac{A+B-1}{2}} = (-1)^{\frac{A+B-1}{4}}$, und so erweist sich (22) als richtig.

Zum Beweise von (23) setze ich $\mathfrak{d}^{(j)} = A^{(j)} + B^{(j)}i$ $(j = 1, 2)$. Dann gilt

$$A + Bi = (A' + B'i)(A'' + B''i). \tag{24}$$

Wenn man noch $N_i(\mathfrak{d}'') = d''$ setzt, so gilt nach dem Reziprozitätsgesetz [27])

$$(\mathfrak{d}', \mathfrak{d}'')_4 = \left(\frac{d'}{\mathfrak{d}''}\right)_4 \left(\frac{d''}{\mathfrak{d}'}\right)_4^{-1} = \left(\frac{\mathfrak{d}''}{d'}\right)_4 \left(\frac{d''}{\mathfrak{d}'}\right)_4^{-1}.$$

Bezeichnet für einen Augenblick α_0 das Konjugierte von α in $R(i)$, so ist

$$(\mathfrak{d}', \mathfrak{d}'')_4 = \left(\frac{\mathfrak{d}''}{\mathfrak{d}'}\right)_4 \left(\frac{\mathfrak{d}''}{\mathfrak{d}_0'}\right)_4 \left(\frac{\mathfrak{d}''}{\mathfrak{d}'}\right)_4^{-1} \left(\frac{\mathfrak{d}_0''}{\mathfrak{d}'}\right)_4^{-1}.$$

Der erste und dritte Faktor fallen weg, die übrigen zwei sind gleich wegen $\left(\frac{\alpha_0}{\beta_0}\right)_4 = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_4^{-1}$, und so folgt

$$(\mathfrak{d}', \mathfrak{d}'')_4 = \left(\frac{\mathfrak{d}''}{\mathfrak{d}'}\right) = \left(\frac{A'' + B''i}{A' - B'i}\right),$$

wobei $(=)$ das zweite Potenzrestsymbol in $R(i)$ ist. Die rechte Seite ist

$$\left(\frac{A'}{A' - B'i}\right)\left(\frac{A'A'' + A'B''i}{A' - B'i}\right).$$

Addiert man im zweiten Faktor den mit $-B''i$ multiplizierten „Nenner" zum „Zähler", so geht der letztere in $A'A'' - B'B'' = A$ über, d. h.

$$(\mathfrak{d}', \mathfrak{d}'')_4 = \left(\frac{A'}{A' - B'i}\right)\left(\frac{A}{A' - B'i}\right).$$

[26]) S. z. B. Ber. II, S. 96, VI.
[27]) S. z. B. Ber. II, S. 106, III.

Besteht aber $\mathfrak{m}$ aus lauter Primidealen erster Art in $R(i)$ und ist $N_i(\mathfrak{m}) = m$, ist endlich α rational, so ist $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{m}}\right) = \left(\frac{\alpha}{m}\right)$ (Kroneckersches Symbol!). Es folgt also

$$(\mathfrak{d}', \mathfrak{d}'')_4 = \left(\frac{A'}{d'}\right)\left(\frac{A}{d'}\right).$$

Der erste Faktor ist gleich $\left(\frac{d'}{A'}\right)$, also gleich 1, denn $A'^2 + B'^2 = d'$. Damit ist auch (23) bewiesen.

6. Ich beweise nunmehr den

II'. Satz. (Ergänzung zum II. Satz.) *Ist* $-4, -\frac{1}{4}D$ *die einzige D-Zerfällung 2. Art*[28]) *(unregelmäßiger Fall!), so ist zunächst ein einziges Zahlenpaar* d', d'' *vorhanden, das* (12) *oder* (12') *genügt. Ferner ist dazu, daß dasselbe* $-4, -\frac{1}{4}D$ *eine D-Zerfällung 3. Art, d. h.* $e_8 = 1$ *sei, notwendig und hinreichend, daß*

a) *im Falle des Bestehens von* (12) $\left(\frac{d'}{-4d''}\right)_4\left(\frac{-4d''}{d'}\right)_4 = 1;$

b) „ „ „ „ „ (12') $\left(\frac{2id'}{\mathfrak{d}''}\right)_4\left(\frac{2id''}{\mathfrak{d}'}\right)_4 = 1$

gilt, wobei $\mathfrak{d}', \mathfrak{d}''$ *ganze Ideale in* $R(i)$ *sind, die die Norm* d' *bzw.* d'' *haben.* Das Symbol $(\ )_4$ ist unter a) und b) in R bzw. in $R(i)$ zu verstehen (vgl. S. 137)[29]).

Zum Beweis bezeichne ich wieder $D'' = -\frac{1}{4}D$ mit n. Dann läßt sich $a = A$, $b = \frac{B}{2}$ aufnehmen[25]). Es geht (13) nach (23) und (20) in

$$\left(\frac{2}{d'}\right)\left(\frac{d'}{\mathfrak{d}''}\right)_4\left(\frac{d''}{\mathfrak{d}'}\right)_4^{-1} = 1,$$

d. h. in

$$\left(\frac{2}{d'}\right)\left(\frac{d'}{\mathfrak{d}''}\right)_4\left(\frac{d''}{\mathfrak{d}'}\right)_4\left(\frac{d''}{\mathfrak{d}'}\right) = 1 \tag{25}$$

über, wobei $\mathfrak{d}', \mathfrak{d}''$ die Bedeutung wie im Satze haben.

Besteht (12) für das Zahlenpaar d', d'', so ist der vierte Faktor links gleich 1, der zweite und der dritte Faktor sind durch Symbole $(-)_4$ ausdrückbar, zum „Zähler" des

---

[28]) Auch der obige Fall gehört also unter die Voraussetzungen (α), (β), (γ).

[29]) Im Falle b) sind $\mathfrak{d}', \mathfrak{d}''$ sonst willkürlich, was auch aus den folgenden Bemerkungen erhellt. — Der Fall b) läßt sich auch durch Symbole $(-)_4$ ausdrücken, wie folgt: Man nimmt statt der obigen Bedingungsgleichung: $\left(\frac{i}{\mathfrak{n}}\right)_4\left(\frac{2d'}{\mathfrak{d}''}\right)_4\left(\frac{2d''}{\mathfrak{d}'}\right)_4 = 1$, wobei $\mathfrak{n} = \mathfrak{d}'\mathfrak{d}''$ ist. Der erste Faktor links ist $(-1)^{\frac{n-1}{8}} = (-1)^{\frac{D+4}{32}}$, der zweite und dritte lassen sich infolge (12') durch Symbole $(-)_4$ ersetzen. Damit geht die vorige Gleichung in $\left(\frac{2d'}{d''}\right)_4\left(\frac{2d''}{d'}\right)_4 = (-1)^{\frac{D+4}{32}}$ über. Dies ist zwar begrifflich einfacher als b), doch habe ich den obigen Ausdruck von b) aus formalen Gründen vorgezogen. — Ähnliches gilt auch für a), dessen Bedingungsgleichung sich einfacher, aber nicht so durchsichtig, als $\left(\frac{d'}{d''}\right)_4\left(\frac{d''}{d'}\right)_4 = -1$ annehmen läßt. — Wie ich schon erwähnt hatte, genügt das Zahlenpaar $d', -4d''$ unter a) den Bedingungen der D-Zerfällungen 2. Art, nur findet davon $\left(\frac{d}{2}\right) = 1$ nicht statt. — Das Zahlenpaar $2id', 2id''$ unter b) verhält sich auch sehr bemerkenswert: dieses Zahlenpaar gleicht sehr den D-Zerfällungen, denn $2id' \cdot 2id'' = D$, doch ist in einer D-Zerfällung x, y jede der Zahlen x, y das Produkt einiger Fundamentaldiskriminanten, im Produkt $2id' \cdot 2id''$ ist aber die Fundamentaldiskriminante -4 in $2i \cdot 2i$ zerlegt.

dritten Faktors läßt sich der Faktor -4 hinzufügen, denn es ist $\left(\frac{-4}{p}\right)_4 = 1$ für jede positive Primzahl p der Gestalt $4m+1$, endlich geht der erste Faktor in $\left(\frac{d'}{2}\right) = \left(\frac{d'}{2}\right)_4^2 = \left(\frac{d'}{4}\right)_4 = \left(\frac{d'}{-4}\right)_4$ über. Dann erhält (25) die gleiche Form wie in a), und somit ist in diesem Falle der Satz als richtig erwiesen.

Der erste Faktor links in (13′) ist auch die linke Seite von (25); der zweite Faktor ist die linke Seite von (22). Es geht also (13′) nach leichter Umformung in

$$\left(\frac{2}{d'}\right)\left(\frac{2id'}{\mathfrak{d}''}\right)_4\left(\frac{2id''}{\mathfrak{d}'}\right)_4\left(\frac{d''}{\mathfrak{d}'}\right) = 1$$

über. Der vierte Faktor läßt sich durch $\left(\frac{d''}{d'}\right)$ ersetzen; das Produkt davon und vom ersten Faktor ist dann gleich 1 nach (12′). Damit ist (13′) in die Gleichung b) verwandelt, und somit ist der II′. Satz bewiesen [30]).

7. Von hier an lasse ich die Voraussetzungen (α), (β), (γ) fallen.

Ist D', D'' wie bisher eine D-Zerfällung 2. Art, wobei aber ich im Falle $2 \mid D$ von jetzt an nicht $2 \mid D'$ voraussetze, so ist bekanntlich wenigstens eine der Zahlen D', D'' positiv; besteht dann für wenigstens eine positive Zahl aus D', D'' die Voraussetzung (α), so gilt der

III. Satz. *Ist D', D'' eine D-Zerfällung 3. Art, ist $D' > 0$ und besteht (α) für D', so ist* $\left(\frac{D''}{D'}\right)_4 = 1$ [31]).

Der Beweis ergibt sich am einfachsten auf Grund des I. Satzes, wie folgt: Beim Beweis setze ich wieder „$2 \mid D'$, wenn $2 \mid D$“ voraus, und demgemäß betrachte ich D' und D'' im einzelnen. Ich multipliziere den zweiten Teil der Gleichungen (3). Ist D' wie im vorliegenden III. Satze beschaffen, so ergibt sich nach dem quadratischen Reziprozitätsgesetz $\left(\frac{a}{D'}\right) = 1$, welcher Art auch $\mathfrak{E}$ sei. Den nämlichen Tatbestand zieht auch (3′) nach sich. Dann folgt nach (10) $\left(\frac{D''}{D'}\right)_4 = 1$. Wenn die Voraussetzungen des vorliegenden Satzes für D'' statt D' gelten, so schließt man ähnlich aus dem ersten Teil von (3) bzw. (3′) $\left(\frac{2a}{D''}\right) = 1$, und daraus nach (10′) $\left(\frac{D'}{D''}\right)_4 = 1$.

---

[30]) Ich betrachte z. B. die Körper $R(\sqrt{pq})$, $R(\sqrt{-pq})$, wobei p, q verschiedene positive Primzahlen der Gestalt $8m+5$ sind und $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$. Für beide Körper gibt es eine einzige D-Zerfällung 2. Art p, q bzw. $-4, pq$, es ist also in beiden Fällen $e_4 = 1$. Dann läßt sich der II. bzw. II′. Satz anwenden, und es folgt: es ist $e_8 = 1$ dann und nur dann, wenn $\left(\frac{p}{q}\right)_4 = 1$, $\left(\frac{q}{p}\right)_4 = 1$ bzw. $\left(\frac{p}{q}\right)_4\left(\frac{q}{p}\right)_4 = -1$. In beiden Körpern kann also nicht zugleich eine Klasse 8. Ordnung vorhanden sein. — Ist $D = -pqr$, wobei p, q, r verschiedene positive Primzahlen der Gestalt $4m+3$ sind, und ist z. B. $-p, qr$ eine D-Zerfällung 2. Art (es kann nicht noch eine eigentliche D-Zerfällung 2. Art vorkommen), d. h. ist $e_4 = 1$, so bestehen (α), (β) aber nicht (γ). Also ist der II. Satz nicht anwendbar, und somit bleibt der Wert von e_8 (0 oder 1) unentschieden. Diesen Fall müßte eine weitere Forschung als ersten erledigen.

[31]) Anders ausgedrückt, die von den Zahlen $\left(\frac{D'}{D''}\right)_4$, $\left(\frac{D''}{D'}\right)_4$, die einen positiven „Nenner“ hat und die im übrigen sinnvoll ist, muß den Wert 1 haben, damit D', D'' von der 3. Art sei.

Nach dem zuletzt erhaltenen Satze und nach der Arbeit IV lassen sich Folgerungen aus der Voraussetzung ziehen, daß jede gerade Invariante durch 8 teilbar ist. Dann sind diese alle auch durch 4 teilbar, und so folgt zunächst aus der Arbeit IV, daß es unter den „Fundamentaldiskriminanten-Faktoren" von D höchstens einen negativen gibt. Ich beweise den

IV. Satz. *Ist jede gerade Invariante der absoluten Klassengruppe durch 8 teilbar (d. h. $e_8 = t - 1$), so gilt mit einer geeigneten Bezeichnung $d_j > 0 (j = 2, 3, \ldots, t)$, wobei $D = d_1 d_2 \ldots d_t$, und $d_1, d_2, \ldots, d_t$ Fundamentaldiskriminanten sind. Weiter gilt dann*

$$\left(\frac{d_j}{p}\right) = 1 \quad \left(j = 1, 2, \ldots, t;\ p \text{ Primzahl},\ p \,\middle|\, \frac{D}{d_j}\right), \tag{26}$$

$$\left(\frac{d_j}{d_l}\right)_4 = \left(\frac{d_l}{d_j}\right)_4 \quad (d_j, d_l > 0;\ j, l = 1, 2, \ldots, t;\ j \neq l), \tag{27}$$

$$\left(\frac{d_1}{d_2 \ldots d_t}\right)_4 = \left(\frac{d_1 d_2}{d_3 \ldots d_t}\right)_4 = \ldots = \left(\frac{d_1 \ldots d_{t-1}}{d_t}\right)_4 = 1\ ^{32}). \tag{28}$$

Es folgt nämlich (26) aus der Arbeit II. Ist auch $d_1 > 0$, so folgt aus dem III. Satze bei der Anwendung auf die D-Zerfällungen — die nun ja alle von der 3. Art sind — $d_1, md_2;\ d_2, md_1;\ d_1 d_2, m \left(m = \frac{D}{d_1 d_2}\right)$:

$$\left(\frac{d_1}{md_2}\right)_4 = 1, \quad \left(\frac{d_2}{md_1}\right)_4 = 1, \quad \left(\frac{d_1 d_2}{m}\right)_4 = 1.$$

Durch Multiplikation ergibt sich (27). Im Falle $d_1 < 0$ ist ähnlich zu schließen mit Hilfe der D-Zerfällungen $d_1, md_2 d_3;\ d_1 d_2, md_3;\ d_1 d_3, md_2;\ d_1 d_2 d_3, m \left(m = \frac{D}{d_1 d_2 d_3}\right)$. Dann folgt (28) unmittelbar aus dem III. Satze.

II. Teil.

8. Im folgenden soll stets $D > 0$ sein, und die ungeraden positiven Primfaktoren von D sollen alle von der Gestalt $4m + 1$ sein [33]); andernfalls ist bekanntlich $N(\varepsilon) = 1$. Ich nehme, wie gestattet, $\varepsilon > 1$ an.

Ich gebe hier zunächst eine vollständigere und mit Hilfe der D-Zerfällungen einfacher ausgedrückte Form der Dirichlet-Tanoschen Sätze an [4]). Hier bedeuten u, v, x, y ganze rationale Zahlen, mit $(u, v) = 1$, $(x, y) = 1$, $u, v > 0$.

V. Satz. *Ist $N(\varepsilon) = 1$, so gibt es eine eigentliche D-Zerfällung 2. Art D_1, D_2, für die $\left(\frac{D_2}{D_1}\right)_4 = 1$, $\sqrt{\varepsilon} < R(\sqrt{D_1}, \sqrt{D_2})$ und noch folgendes gilt:*

Wenn $2 \nmid D$ und

1. *$\varepsilon = u + v\sqrt{D}$, dann ist $\sqrt{\varepsilon} = x\sqrt{D_1} + y\sqrt{D_2}$, $x^2 D_1 - y^2 D_2 = 1$,*
$$\left(\frac{D_1}{D_2}\right)_4 = \left(\frac{-1}{x}\right);$$

---

[32]) Ist z. B. $t = 3$ und $D > 0$, so folgt aus $e_8 = 2$: $d_j > 0$ $(j = 1, 2, 3)$; die 6 Symbole $\left(\frac{d_j}{d_l}\right)_4$ $(j \neq l)$ sind sinnvoll und haben den nämlichen Wert $(+1$ oder $-1)$.

[33]) Einfacher: $D > 0$ und D befriedigt (α) — doch will ich hier diese Redeweise aus dem I. Teil nicht benützen. Nur die Definition der Symbole $(-)_4$ und $(=)_4$ (S. 137) und der (elementare!) Beweis von (22) und (23) (S. 139—141) wird aus dem I. Teil auch hier angewandt, und dazu sind noch die Definitionen der D-Zerfällungen und der D-Zerfällungen 2. Art aus der Arbeit II hinzuzunehmen.

2. $\varepsilon = \frac{1}{2}(u + v\sqrt{D})$, „ „ $\sqrt{\varepsilon} = \frac{1}{2}(x\sqrt{D_1} + y\sqrt{D_2})$, $x^2 D_1 - y^2 D_2 = 4$,
$$\left(\frac{D_1}{D_2}\right)_4 = \left(\frac{2}{D_2}\right)\left(\frac{-1}{x}\right).$$

Wenn $2 \mid D$, *also* $\varepsilon = u + v\sqrt{D}$ *und*

3. $u \equiv 1 \pmod 4$, *dann ist* $\sqrt{\varepsilon} = x\sqrt{D_1} + y\sqrt{D_2}$, $x^2 D_1 - y^2 D_2 = 1$, $2 \mid D_2$,
$$\left(\frac{D_1}{D_2}\right)_4 = \left(\frac{-1}{x}\right)(-1)^y;$$

4. $u \equiv -1 \pmod 4$, „ „ $\sqrt{\varepsilon} = x\sqrt{\frac{D_1}{4}} + y\sqrt{D_2}$, $x^2 \frac{D_1}{4} - y^2 D_2 = 1$, $2 \mid D_1$,
$$\left(\frac{D_1}{D_2}\right)_4 = \left(\frac{-1}{x}\right).$$

Daraus folgt der

V′. Satz. *Ist* $N(\varepsilon) = 1$, *so gibt es eine eigentliche D-Zerfällung 2. Art* D_1, D_2, *für die wenigstens eine der Zahlen* $\left(\frac{D_1}{D_2}\right)_4$, $\left(\frac{D_2}{D_1}\right)_4$ *gleich 1 ist.*

Ich beweise vom V. Satze nur z. B. den Fall 4., da die übrigen sich ähnlich betrachten lassen. Die darauf bezüglichen Rechnungen skizziere ich nur kurz, da es eine leichte Vervollständigung der in [4]) angewandten Methode ist. Da jetzt $u^2 - v^2 D = 1$, d. h. $(u+1)(u-1) = v^2 D$, so folgt leicht

$$u + 1 = 2x^2 \frac{D_1}{4}, \quad u - 1 = 2y^2 D_2,$$

wobei D_1, D_2 ganz rational sind, $D_1 D_2 = D$, $D_1, D_2 > 1$, $8 \mid D_1$, $2 \nmid y$. Es ist also

$$1 = x^2 \frac{D_1}{4} - y^2 D_2. \tag{29}$$

Hieraus läßt sich die Behauptung über $\sqrt{\varepsilon}$ sofort ablesen. Auch $2 \nmid x$ muß bestehen, woraus $D_2 \equiv 1 \pmod 8$ folgt. Hiernach und nach (29) ist also D_1, D_2 eine D-Zerfällung 2. Art. Ich bezeichne $\frac{1}{8} D_1$ mit m_1, dann geht (29) in

$$1 = x^2 \cdot 2m_1 - y^2 D_2$$

über. Dabei wähle ich das Vorzeichen von y so, daß $y \equiv 1 \pmod 4$ ist. Dann folgt leicht:

$$1 = \left(\frac{1}{D_2}\right)_4 = \left(\frac{2m_1}{D_2}\right)_4 \left(\frac{x}{D_2}\right) = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)_4 \left(\frac{D_2}{x}\right) = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)_4 \left(\frac{-1}{x}\right);$$

$$1 = \left(\frac{1}{m_1}\right)_4 = \left(\frac{D_2}{m_1}\right)_4 \left(\frac{-1}{m_1}\right)_4 \left(\frac{y}{m_1}\right) = \left(\frac{D_2}{2m_1}\right)_4 \left(\frac{D_2}{2}\right)_4 \left(\frac{-1}{m_1}\right)_4 \left(\frac{2}{y}\right) = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)_4 (-1)^{\frac{D_2-1}{8} + \frac{m_1-1}{4} + \frac{y-1}{4}};$$

$$1 \equiv 2m_1 - 2y - D_2 + 2 \pmod{16}.$$

Aus den zwei letzten Gleichungen folgt noch

$$1 = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)_4.$$

9. Ich gehe jetzt zu den wesentlich neuen Sätzen betreffend $N(\varepsilon)$ über. Ich setze dazu $N(\varepsilon) = -1$ voraus. (Die vorige Voraussetzung $\varepsilon > 1$ braucht aber nicht zu bestehen.)

Es sei *zunächst* $2 \nmid D$. Ich bezeichne vorläufig D mit n. Dann setze ich

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}(u + v\sqrt{n}), \tag{30}$$

wobei u, v ganz rational sind und $(u, v) = 1$ oder 2. Nach der Voraussetzung gilt:

$$u^2 - v^2 n = -4. \tag{31}$$

Ich übernehme die Bezeichnungen p_j, $\mathfrak{p}_j$, $\mathfrak{n}$, A, B von 5., ich lasse aber hier $\mathfrak{p}_j$ nicht willkürlich, sondern ich setze

$$\mathfrak{p}_j = (2 + ui, p_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, t = r); \tag{32}$$

im übrigen soll natürlich $\mathfrak{p}_j$ auch nachher primär sein.

Da

$$(B + \sqrt{n})(u + v\sqrt{n}) = (Bu + vn) + (Bv + u)\sqrt{n}\,, \tag{33}$$

folgt durch Normenbildung nach (19) und (31):

$$4A^2 = (Bu + vn)^2 - (Bv + u)^2 n\,. \tag{34}$$

Multipliziert man die Klammerausdrücke rechts mit $-v$ bzw. u, und addiert sie dann, so erhält man nach (31) -4; jene Zahlen haben also keinen ungeraden gemeinsamen Teiler $(\neq 1)$. Daraus folgt leicht ähnliches auch für die Zahlen $Bu + vn + 2A$, $Bu + vn - 2A$ nach (34). Wieder nach (34) folgt also:

$$Bu + vn + 2A = \pm 2^s x^2 P\,, \tag{35}$$

$$Bu + vn - 2A = \pm 2^s y^2 Q\,, \tag{36}$$

wobei x, y, P, Q ganze rationale Zahlen sind, $P, Q > 0$, $PQ = n$, $s = 0$ oder 1, und die Zahlen xP, yQ keinen ungeraden gemeinsamen Teiler $(\neq 1)$ haben.

Es folgt leicht, daß $s = 0$. Sind nämlich u, v ungerade, so ist es klar, da B gerade ist. Im anderen Falle sind u, v gerade; aus (31) folgt $4 \nmid v$; auch die (geraden) Zahlen $Bu + vn$, $2A$ sind durch 4 nicht teilbar; eine der linken Seiten von (35) und (36) ist also genau durch die zweite Potenz von 2 teilbar, d. h. $s = 0$.

Ich beweise noch, daß $P = n$. Nach (17) ist nämlich $A \equiv -Bi \pmod{\mathfrak{p}_j}$, und nach (32) ist $2 \equiv -ui \pmod{\mathfrak{p}_j}$. Nach Multiplikation folgt $2A \equiv -Bu \pmod{\mathfrak{p}_j}$, d. h. $p_j \mid 2A + Bu$. Die linke Seite von (35) ist also durch n teilbar, und da xP, yQ keinen ungeraden gemeinsamen Teiler $(\neq 1)$ haben, muß $P = n$, $Q = 1$ sein.

Es folgt aus (35) und (36)

$$4A = \pm (x^2 n - y^2)\,^{34}), \tag{37}$$

wobei die drei Glieder keinen ungeraden gemeinsamen Teiler $(\neq 1)$ haben. Dann ist

$$\left(\frac{A}{d}\right) = 1 \tag{38}$$

für jeden Teiler d von n.

Aus (23), (20) ergibt sich vorläufig nur für $2 \nmid D$ der folgende Satz, den ich später auch für $2 \mid D$ beweisen werde:

VI. Satz. *Ist* $N(\varepsilon) = -1$, *so besteht für jede D-Zerfällung* D_1, D_2

$$\left(\frac{D_1}{\mathfrak{d}_2}\right)_4 \left(\frac{D_2}{\mathfrak{d}_1}\right)_4^{-1} = 1\,, \tag{39}$$

wobei $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$ *die ganzen Ideale in* $R(i)$ *sind, die die Norm* D_1 *bzw.* D_2 *haben, und die Primfaktoren von* $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$ *die Teiler von* $2 + ui$ *sind, wobei* u *den „rationalen Teil" von* 2ε *bedeutet* (d. h. $2\varepsilon = u + v\sqrt{D}$, wobei u, v rational sind).

---

[34]) Auch das Vorzeichen läßt sich leicht bestimmen, doch ist das für unsere Zwecke entbehrlich.

Für D-Zerfällungen 2. Art läßt sich in (39) das Symbol $(=)_4$ in $(—)_4$ verwandeln, und so folgt der

VI'. Satz. *Ist* $N(\varepsilon) = -1$, *so besteht für jede D-Zerfällung* 2. *Art* D_1, D_2

$$\left(\frac{D_1}{D_2}\right)_4 \left(\frac{D_2}{D_1}\right)_4 = 1 \quad (40)$$

[35]).

Im Falle $2 \mid D$ fehlt noch der Beweis des VI. Satzes. Ich setze hierfür $n = \frac{1}{8} D$ und

$$\varepsilon = u_0 + v_0\sqrt{2n} \quad (41)$$

mit

$$u_0^2 - v_0^2 \cdot 2n = -1\,, \quad (42)$$

wobei u_0, v_0 ungerade ganze rationale Zahlen sind. Mit geeignetem ε [36]) wird

$$u_0 \equiv v_0 \equiv 1 \pmod 4\,. \quad (43)$$

Ich übernehme nochmals die Bezeichnungen $p_j, \mathfrak{p}_j, \pi, A, B$ aus **5.** (es ist jetzt $r = t - 1$), und dabei gelte

$$\mathfrak{p}_j = (1 + u_0 i, p_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, r = t - 1). \quad (44)$$

Ich setze noch

$$A_0 + B_0 i = (1 + i)(A + Bi) \quad (45)$$

mit rationalen A_0, B_0, d. h.

$$A_0 = A - B,\ B_0 = A + B\,. \quad (46)$$

Es folgt aus (19):

$$A_0^2 + B_0^2 = 2n\,. \quad (47)$$

Durch Normenbildung aus

$$(B_0 + \sqrt{2n})(u_0 + v_0\sqrt{2n}) = (B_0 u_0 + v_0 \cdot 2n) + (B_0 v_0 + u_0)\sqrt{2n} \quad (48)$$

ergibt sich nach (42) und (47)

$$A_0^2 = (B_0 u_0 + v_0 \cdot 2n)^2 - (B_0 v_0 + u_0)^2 \cdot 2n\,. \quad (49)$$

Daraus folgt ähnlich wie vorher:

$$B_0 u_0 + v_0 \cdot 2n + A_0 = \pm 2^s x^2 \cdot 2P\,, \quad (50)$$

$$B_0 u_0 + v_0 \cdot 2n - A_0 = \pm 2^s y^2 \cdot Q\,, \quad (51)$$

wobei ähnliches für x, y, P, Q, s gilt wie in (35), (36).

---

[35]) Leider läßt sich aus dem übrigen (sich auf D-Zerfällungen, die nicht von der 2. Art sind, beziehenden) Teil des VI. Satzes keine zu (40) ähnliche Folgerung ziehen. Im allgemeinen gibt der VI. Satz eine Aufklärung darüber, welches die (ungeraden) Primidealfaktoren von D sind, die $2 + ui$ teilen. Dazu erwähne ich die folgenden zwei anderen Fassungen vom VI. Satze z. B. für $2 \nmid D$, die sich mit Hilfe des Reziprozitätsgesetzes in $R(i)$ sofort ergeben (dabei sind $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2$ aus dem VI. Satze als primär zu wählen): $\left(\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{d}_2}\right) = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)$; $\left(\frac{\mathfrak{d}_1^0}{\mathfrak{d}_2}\right) = 1$ (2-te Potenzrestsymbole!), wobei $\mathfrak{d}_1^0$ das konjugierte von $\mathfrak{d}_1$ in $R(i)$ ist. Die letzte Fassung läßt sich besonders einfach deuten: nimmt man im Falle $N(\varepsilon) = -1$ zwei ganze primäre Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ in $R(i)$ mit $\mathfrak{a} \mid 2 + ui$, $\mathfrak{b} \mid 2 - ui$, $N_i(\mathfrak{a}) \cdot N_i(\mathfrak{b}) = D$, so ist $\mathfrak{a}$ ein quadratischer Rest von $\mathfrak{b}$ und umgekehrt. — Selbstverständlich sind die Gleichungen (39) nicht unabhängig, vielmehr folgen nach (21) alle aus den $t-1$ Gleichungen, die sich z. B. auf die D-Zerfällungen $p_j, \frac{D}{p_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, t-1)$ beziehen, wobei $p_1, p_2, \ldots, p_{t-1}$ verschiedene ungerade Primzahlfaktoren von D sind, alle von der Gestalt $4m + 1$. — Schreibt man ähnlich die Gleichungen von (40) auf, die sich auf ein volles System unabhängiger D-Zerfällungen 2. Art beziehen, so folgen daraus alle Gleichungen von (40). — Beim A. Scholzschen Verfahren stellte sich unmittelbar der VI'. Satz heraus, ohne den VI. Satz.

[36]) Diese Beschränkung für ε ist im VI. Satze leicht ersichtlich wieder aufhebbar.

Jetzt ist aber $s = 1$, denn aus (43), (46) und $2 \mid B$ folgt, daß die linke Seite von (51) kongruent 2 (mod 4) ist.

Auch jetzt folgt leicht $P = n$, ähnlich wie vorher, denn nach (17), (45) bzw. nach (44) ist $A_0 \equiv -B_0 i \pmod{\mathfrak{p}_j}$ und $1 \equiv -u_0 i \pmod{\mathfrak{p}_j}$, also auch $A_0 \equiv -B_0 u \pmod{\mathfrak{p}_j}$.

Durch Subtraktion von (50) und (51) ergibt sich

$$A_0 = \pm (x^2 \cdot 2n - y^2), \tag{52}$$

wobei die Glieder teilerfremd sind.

Nochmals folgt

$$\left(\frac{A_0}{d}\right) = 1 \tag{53}$$

für jeden ungeraden Teiler $d(>0)$ von n. Ist $\mathfrak{d} = (1 + u_0 i, d)$ (d. h. $\mathfrak{d}$ ist das Produkt von solchen $\mathfrak{p}_j$, die d teilen), so ist nach (17) $B \equiv Ai \pmod{\mathfrak{d}}$. Daraus folgt wegen (46):

$$\left(\frac{A_0}{d}\right) = \left(\frac{A_0}{\mathfrak{d}}\right) = \left(\frac{A - B}{\mathfrak{d}}\right) = \left(\frac{A - Ai}{\mathfrak{d}}\right) = \left(\frac{A}{\mathfrak{d}}\right)\left(\frac{1 - i}{\mathfrak{d}}\right) = \left(\frac{A}{d}\right)\left(\frac{1 - i}{\mathfrak{d}}\right),$$

und so geht (53) in

$$\left(\frac{A}{d}\right)\left(\frac{1 - i}{\mathfrak{d}}\right) = 1 \tag{54}$$

über.

Definitionsgemäß und nach dem Eulerschen Kriterium gilt:

$$(\mathfrak{d}, (1+i)^3)_4 = \left(\frac{d}{(1+i)^3}\right)_4 \left(\frac{2^3}{\mathfrak{d}}\right)_4^{-1} = i^{-\frac{d-1}{4}} \left(\frac{2}{\mathfrak{d}}\right)_4 = \left(\frac{-i}{\mathfrak{d}}\right)_4 \left(\frac{2}{\mathfrak{d}}\right)_4 = \left(\frac{-2i}{\mathfrak{d}}\right)_4 = \left(\frac{1-i}{\mathfrak{d}}\right).$$

Daraus und aus (23), (54) folgt, wenn man $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_0 = A + Bi = \mathfrak{n}$ setzt (dann ist $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_0 \mid 1 + u_0 i$!):

$$(\mathfrak{d}, \mathfrak{d}_0)_4 (\mathfrak{d}, (1+i)^3)_4 = 1 .$$

Nach der Umformung $(\alpha, \beta)_4 (\alpha, \gamma)_4 = (\alpha, \beta\gamma)_4$ ergibt sich daraus $(\mathfrak{d}, \mathfrak{d}_0 (1+i)^3)_4 = 1$, d. h.

$$\left(\frac{d}{\mathfrak{d}_0(1+i)^3}\right)_4 \left(\frac{8d_0}{\mathfrak{d}}\right)_4^{-1} = 1 ,$$

wobei d_0 die Norm von $\mathfrak{d}_0$ in $R(i)$ ist. Daraus ist die Richtigkeit des VI. Satzes für $2 \mid D$ leicht einzusehen. (Um alles klarzustellen, setze ich $u = 2u_0$, $v = v_0$. Dann ist $\varepsilon = \frac{1}{2}(u + v\sqrt{D})$; es ist weiter $D_1 = d$, $D_2 = 8d_0$ eine D-Zerfällung; endlich haben $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}_0 (1+i)^3$ die Norm D_1 bzw. D_2 in $R(i)$, und $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}_0$ sind Teiler von $1 + u_0 i$, d. h. von $2 + ui$ [37].)

10. Es bedeute D_1, D_2 eine eigentliche D-Zerfällung 2. Art. Dann gilt nach dem V′. und VI′. Satz:

1. *Gibt es kein* D_1, D_2 (dann und nur dann ist $e_4 = 0$), *oder gibt es wenigstens ein solches und ist für jedes* $\left(\frac{D_1}{D_2}\right)_4 = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)_4 = -1$ (dann ist $0 = e_8 < e_4$), *so ist* $N(\varepsilon) = -1$.

---

[37]) Wie wir gesehen haben, ist z. B. für $2 \nmid D$ der VI. und auch der VI′. Satz eine Folgerung der Tatsache: Wenn die Norm der Grundeinheit $\varepsilon = \frac{1}{2}(u + v\sqrt{D})$ gleich -1 ist, dann gibt es eine Darstellung $D = \alpha^2 + \beta^2$ mit ganzen rationalen α, β, wobei α als ungerade vorausgesetzt ist, für welche $\alpha = x^2 - Dy^2$ ist mit ganzen rationalen x und y, die relativ prim sind; ein solches Zahlenpaar α, β ist es, wofür $\alpha + \beta i \mid 2 + ui$ oder $\alpha - \beta i \mid 2 + ui$ gilt.

2. *Gibt es ein* D_1, D_2, *für welches* $\left(\frac{D_1}{D_2}\right)_4 \left(\frac{D_2}{D_1}\right)_4 = -1$ *besteht* (dann ist $0 \leqq e_8 < e_4$), *so ist* $N(\varepsilon) = +1$.

3. *Nur dann läßt sich also das Vorzeichen von* $N(\varepsilon)$ *mit Hilfe von Symbolen* $(\ )_4$ *nicht bestimmen, wenn für jedes* D_1, D_2 $\left(\frac{D_1}{D_2}\right)_4 = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)_4$ *ist und wenigstens für eines davon sogar* $\left(\frac{D_1}{D_2}\right)_4 = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)_4 = 1$ *ist* (wenn es speziell nur ein D_1, D_2 gibt und hierfür $\left(\frac{D_1}{D_2}\right)_4 = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)_4 = 1$ ist, dann ist $e_8 = e_4 = 1$).

Dabei sind die Bemerkungen in den Klammern ( ) Folgerungen aus dem II. und III. Satz und aus der Arbeit II. Die erste Hälfte von 1. ist schon in der Arbeit II enthalten.

Eingegangen 12. September 1933.

Elementarteilertheorie in algebraischen Zahlkörpern.

Von *Wolfgang Franz* in Marburg (Lahn).

---

k sei ein algebraischer Zahlkörper endlichen Grades. Im Ring aller n-reihigen quadratischen Matrizen mit Elementen aus k heißt eine Matrix A' teilbar durch die Matrix A, wenn $A' = PAQ$, wo die Multiplikatoren P, Q aus ganzen algebraischen Zahlen von k bestehen. Ist auch A durch A' teilbar, so heißen A' und A wechselseitig teilbar. Diese Relation ist transitiv; sind A' und A, ferner A'' und A wechselseitig teilbar, so auch A'' und A'. Der ganze Ring zerfällt also in elementfremde Klassen wechselseitig teilbarer Matrizen. Sind in der obigen Gleichung P und Q unimodular, d. h. sind sie ganzzahlig und haben sie eine Einheit des Körpers als Determinante, so gilt auch $A = P^{-1}A'Q^{-1}$, und P^{-1} und Q^{-1} sind wieder unimodular. A' und A heißen dann äquivalent. Äquivalente Matrizen sind sicher wechselseitig teilbar; ob auch das Umgekehrte gilt, läßt sich nicht von vornherein entscheiden. Die Äquivalenzrelation ist ebenfalls transitiv; der ganze Ring zerfällt in elementfremde Klassen äquivalenter Matrizen, und jede Klasse wechselseitig teilbarer Matrizen besteht aus vollen Klassen äquivalenter Matrizen. Die Frage nach der Teilbarkeit und Äquivalenz von zwei vorgelegten Matrizen wird durch die Elementarteilertheorie beantwortet. Diese Theorie ist für den Fall, daß k der rationale Zahlkörper ist, seit langem allgemein geläufig, für den Fall eines allgemeinen Zahlkörpers jedoch zuerst von E. Steinitz im Jahre 1912 entwickelt worden, und zwar im Rahmen einer weit ausgeführten Theorie der Moduln und verallgemeinerten abelschen Gruppen [1]), innerhalb welcher die Sätze über Elementarteiler mit unverhältnismäßig langen und von der üblichen rationalen Theorie wesentlich verschiedenen Beweisen erscheinen. Im folgenden soll die algebraische Elementarteilertheorie selbständig, mit möglichst einfachen Hilfsmitteln und soweit möglich nach dem Muster des rationalen Falles aufgebaut werden. Teilweise das gleiche Ziel verfolgt eine Arbeit von W. Krull [2]) aus dem Jahre 1932, in der wechselseitige Teilbarkeit [3]) und Anwendungen auf die Modultheorie, nicht aber Äquivalenz in unserem Sinne und nicht Teilbarkeit schlechthin behandelt werden. Über die mancherlei Berührungspunkte mit dieser Arbeit vergleiche man die Anmerkungen [3]), [8]), [10]), [11]).

---

[1]) E. Steinitz, Rechteckige Systeme und Moduln in algebraischen Zahlkörpern. Teil I, Math. Ann. **71** (1912), S. 328; Teil II, Math. Ann. **72** (1912), S. 297; im folgenden angeführt als Steinitz I und II.

[2]) W. Krull, Matrizen, Moduln und verallgemeinerte Abelsche Gruppen im Bereich der ganzen algebraischen Zahlen. S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss., Math.-nat. Kl., 1932, Abh. 2, S. 13.

[3]) Krull verwendet einen ebenfalls auf unimodulare Matrizen gestützten Äquivalenzbegriff, der den der wechselseitigen Teilbarkeit, jedoch nicht den der Äquivalenz in unserem Sinne umfaßt und der für die von ihm weiterhin behandelten Anwendungen auf Moduln und Gruppen (bis auf eine Sonderbetrachtung, vgl. unten Anm. [9])) genügt. Er legt dabei modifizierte Gleichheitsbegriffe unter den Matrizen zugrunde („a-Gleichheit“ und „u-Gleichheit“, a. a. O. S. 16/17), wodurch von den oben genannten drei Problemen nur das der wechselseitigen Teilbarkeit erledigt wird. Über das Verhältnis der beiden Äquivalenzbegriffe vergleiche man Anm. [10]).

§ 1. Wechselseitige Teilbarkeit.

a) Notwendige Bedingungen[4]). A' und A seien quadratische n-reihige Matrizen aus k. Bezeichnet $\mathfrak{d}_1'$ den größten gemeinsamen Teiler (g. g. T.) der Elemente von A', $\mathfrak{d}_1$ den g. g. T. von A, so folgt aus der Teilbarkeit von A' durch A, $A' = PAQ$ mit ganzzahligen P, Q, daß $\mathfrak{d}_1 | \mathfrak{d}_1'$. Geht man von dieser Gleichung zu der ν-ten Abgeleiteten über[5]) ($\nu = 1, \ldots, n$), so folgt ebenso $\mathfrak{d}_\nu | \mathfrak{d}_\nu'$. Für die wechselseitige Teilbarkeit von A' und A ist also die Gleichheit $\mathfrak{d}_\nu = \mathfrak{d}_\nu'$ der g. g. T. aller ν-reihigen Unterdeterminanten, der *ν-ten Determinantenteiler* (ν-ten D.-T.) notwendig. Ist A vom Range r, so ist $\mathfrak{d}_1 \neq 0$, $\mathfrak{d}_2 \neq 0, \ldots, \mathfrak{d}_r \neq 0$, $\mathfrak{d}_{r+1} = \cdots = \mathfrak{d}_n = 0$. Da im Falle ganzzahliger Matrizen A für $\nu = 1, \ldots, r$ gilt $\mathfrak{d}_\nu | \mathfrak{d}_{\nu+1}$, so setzt man allgemein

$$\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{d}_1, \ \mathfrak{e}_2 = \frac{\mathfrak{d}_2}{\mathfrak{d}_1}, \ldots, \ \mathfrak{e}_r = \frac{\mathfrak{d}_r}{\mathfrak{d}_{r-1}}, \quad \mathfrak{e}_{r+1} = \frac{\mathfrak{d}_{r+1}}{\mathfrak{d}_r} = 0, \ \mathfrak{e}_{r+2} = 0, \ldots, \ \mathfrak{e}_n = 0.$$

$\mathfrak{e}_\nu$ heißt der *ν-te Elementarteiler* (ν-te E.-T.) von A. $\mathfrak{d}_r$ und $\mathfrak{e}_r$ nennen wir kurz den letzten D.-T. bzw. den letzten E.-T. von A. Für die wechselseitige Teilbarkeit von A' und A ist also die Gleichheit entsprechender E.-T. notwendig.

Zu dieser ersten notwendigen Bedingung tritt noch eine zweite, auf die man zwangsläufig geführt wird, wenn man den zweiten Teil dieses Paragraphen durchgeht. Sei A vom Range r. Dann ist $A^{(r)}$ vom Range 1, die Spalten von $A^{(r)}$ sind also, soweit sie nicht Nullspalten sind, einander proportional. Die g. g. T. der Spalten gehören also sämtlich in die gleiche absolute Idealklasse. Diese heißt die *Spaltenklasse* oder *Linksklasse* $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(A)$ von A. Analog ist die *Zeilen-* oder *Rechtsklasse* $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}(A)$ von A definiert. Da $A^{(r)}$ vom Range 1 ist, läßt sich $A^{(r)}$ im Sinne der Matrizenmultiplikation als Produkt einer Spalte und einer Zeile schreiben, und der g. g. T. $\mathfrak{s}$ dieser Spalte liegt in der Idealklasse $\mathfrak{S}$, der g. g. T. $\mathfrak{z}$ dieser Zeile in $\mathfrak{Z}$. Da $A^{(r)}$ selbst aus allen Produkten von Zahlen dieser Spalte und Zeile besteht, wird der g. g. T. $\mathfrak{d}_r$ von $A^{(r)}$ nach dem distributiven Gesetz für den g. g. T. gerade gleich $\mathfrak{s}\mathfrak{z}$. Für die Idealklassen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{Z}$ folgt also $\mathfrak{S}\mathfrak{Z} \sim \mathfrak{d}_r$[6]). Also:

Satz 1. *Der letzte Determinantenteiler $\mathfrak{d}_r$ von A gehört zur Produktklasse von Spaltenklasse $\mathfrak{S}$ und Zeilenklasse $\mathfrak{Z}$ von A.*

Seien nun die Matrizen A' und A wechselseitig teilbar. Dann stimmen sie in entsprechenden E.-T. und insbesondere im Rang überein. Ist $A' = PAQ$, also $A'^{(r)} = P^{(r)}A^{(r)}Q^{(r)}$, so haben zunächst $A^{(r)}$ und $P^{(r)}A^{(r)}$ die gleiche Zeilenklasse, denn die Zeilen dieses Produktes sind denen von $A^{(r)}$ proportional. Da aber $A^{(r)}$ und $P^{(r)}A^{(r)}$ auch den gleichen letzten D.-T. $\mathfrak{d}_r$ haben, haben sie nach Satz 1 auch die gleiche Spaltenklasse. Ebenso erkennt man, daß $P^{(r)}A^{(r)}$ und $P^{(r)}A^{(r)}Q^{(r)} = A'^{(r)}$ die gleiche Spaltenklasse, und mittels Satz 1, daß sie auch die gleiche Zeilenklasse besitzen. — Als notwendige Bedingungen für die wechselseitige Teilbarkeit ergeben sich also: Gleichheit entsprechender E.-T., $\mathfrak{e}_\nu' = \mathfrak{e}_\nu$, und Gleichheit der Spalten- und Gleichheit der Zeilenklassen, $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}$, $\mathfrak{Z}' = \mathfrak{Z}$. Dabei ist $\mathfrak{Z}' = \mathfrak{Z}$ eine Folge der übrigen Bedingungen.

b) Hinreichende Bedingungen. Wir stellen zwei Hilfssätze voran. Alle Zahlen und Ideale im folgenden sollen, wenn nicht ausdrücklich anderes bemerkt ist, dem Körper k angehören.

---

[4]) Zu diesem Abschnitt vgl. Steinitz I, Nr. 9—13, S. 331.

[5]) $A^{(\nu)}$, die ν-te Abgeleitete von A, bezeichnet die aus allen ν-reihigen Unterdeterminanten von A in beliebiger, fester Reihenfolge gebildete Matrix. Aus $A = BC$ folgt bekanntlich $A^{(\nu)} = B^{(\nu)}C^{(\nu)}$.

[6]) Wir schreiben kurz $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{a}$ dafür, daß das Ideal $\mathfrak{a}$ in der Idealklasse $\mathfrak{S}$ liegt. Das Produkt der Klasse $\mathfrak{S}$ mit der Idealklasse des Ideals $\mathfrak{a}$ bezeichnen wir kurz mit $\mathfrak{S}\mathfrak{a}$.

Hilfssatz 2. *Ist* $(a_1, \ldots, a_n) = \mathfrak{d}$ *und* d *eine Zahl aus* $\mathfrak{d}$, $(d) = \mathfrak{d}\mathfrak{d}'$ *mit ganzem* $\mathfrak{d}'$, *so gibt es durch* $\mathfrak{d}'$ *teilbare ganze Zahlen* $x_1, \ldots, x_n$ *mit* $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = d$.

Beweis. Es ist dann $(a_1\mathfrak{d}', \ldots, a_n\mathfrak{d}') = (d)$, es gibt also Zahlen $x_1', \ldots, x_n'$ aus $a_1\mathfrak{d}', \ldots, a_n\mathfrak{d}'$ mit $x_1' + \cdots + x_n' = d$, und diese sind von der Form $a_1 x_1, \ldots, a_n x_n$ mit durch $\mathfrak{d}'$ teilbaren ganzen $x_1, \ldots, x_n$.

Hilfssatz 3. [7]) *Ist der Rang des Linearformensystems* $y_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu$ $(\mu = 1, \ldots, n)$ *mit dem größten gemeinsamen Koeffiziententeiler* $\mathfrak{e}$ *mindestens* 2, *so kann man für die* x_ν *solche durch ein gegebenes ganzes Ideal* $\mathfrak{t}$ *teilbare ganze Zahlen setzen, daß der größte gemeinsame Teiler*

$$(y_1, \ldots, y_n) = \mathfrak{e}\mathfrak{t}.$$

Beweis. Ohne Einschränkung dürfen wir die $a_{\mu\nu}$ als ganze Zahlen annehmen; der Fall gebrochener $a_{\mu\nu}$ führt durch Multiplikation des Systems mit einem gemeinsamen Nenner auf diesen Fall zurück. Weiter dürfen wir annehmen, daß

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{und} \quad a_{11} \neq 0.$$

$\mathfrak{p}$ durchlaufe sämtliche Primteiler von $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{t}$ und d. Geht $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{e}$ genau zur e-ten Potenz auf (Bezeichnung $\mathfrak{p}^e \,||\, \mathfrak{e}$), so gibt es einen Koeffizienten a_{lm} mit $\mathfrak{p}^e \,||\, a_{lm}$. Ist $\mathfrak{p}^t \,||\, \mathfrak{t}$ und wählen wir die x_ν' so, daß $\mathfrak{p}^t || x_m'$, daß aber $\mathfrak{p}$ in den anderen x_ν' in einer höheren als der t-ten Potenz aufgeht, so wird $\mathfrak{p}^{e+t} \,||\, y_l'$. Stellen wir für jedes der endlich vielen $\mathfrak{p}$ diese Forderungen an die x_ν', so bekommen wir durch $\mathfrak{t}$ teilbare ganze Zahlen x_ν' derart, daß für die zugehörigen Werte y_μ' der Linearformen

$$(y_1', \ldots, y_n') = \mathfrak{e}\,\mathfrak{t}\,\mathfrak{f},$$

mit einem ganzen Ideal $\mathfrak{f}$, das zu allen $\mathfrak{p}$ prim ist. Wegen $a_{11} \neq 0$ dürfen wir dabei noch $y_1' \neq 0$ annehmen. Die von den $\mathfrak{p}$ verschiedenen endlich vielen Primteiler von y_1' seien mit $\mathfrak{q}$ bezeichnet.

Das Gleichungssystem

$$a_{11} x_1'' + a_{12} x_2'' = 0, \qquad a_{21} x_1'' + a_{22} x_2'' = cd,$$

in dem c eine noch festzulegende ganze Zahl ist, läßt sich durch ganze x_1'', x_2'' lösen. Sei p eine ganze, durch jedes $\mathfrak{p}$ in höherer als der t-ten Potenz (durch jedes $\mathfrak{p}$ also mindestens in erster Potenz) aber durch kein $\mathfrak{q}$ teilbare Zahl. Wir setzen

$$x_1 = x_1' + p x_1'', \quad x_2 = x_2' + p x_2'', \quad x_3 = x_3', \ldots, x_n = x_n'.$$

Dann erfüllen auch diese x_ν noch die oben an die x_ν' gestellten Forderungen, und für den g. g. T. der zugehörigen Werte y_μ gilt demgemäß ebenso

$$(y_1, \ldots, y_n) = \mathfrak{e}\,\mathfrak{t}\,\mathfrak{f}_0,$$

mit ganzem, zu allen $\mathfrak{p}$ primem $\mathfrak{f}_0$. $\mathfrak{f}_0$ enthält also höchstens Primideale $\mathfrak{q}$. Dabei ist

$$y_1 = y_1', \quad y_2 = y_2' + pcd.$$

Jetzt verfügen wir über c wie folgt: Gilt für eins der $\mathfrak{q}$ die Beziehung $\mathfrak{q} \mid y_2'$, so sei $\mathfrak{q} \nmid c$; dann gilt wegen $\mathfrak{q} \nmid pcd$ auch $\mathfrak{q} \nmid y_2$ und somit $\mathfrak{q} \nmid \mathfrak{f}_0$. Gilt jedoch $\mathfrak{q} \nmid y_2'$, so sei $\mathfrak{q} \mid c$; auch dann folgt $\mathfrak{q} \nmid y_2$, also $\mathfrak{q} \nmid \mathfrak{f}_0$. Bei dieser Wahl von c kann also $\mathfrak{f}_0$ keinen Primteiler $\mathfrak{q}$ enthalten, also ist $\mathfrak{f}_0 = 1$, und das ist die Behauptung.

Jetzt sei A eine beliebige n-reihige quadratische Matrix. Indem wir links oben an A Nullspalten und -zeilen anbringen, erhöhen wir zunächst die Reihenzahl auf $3n$.

---

[7]) Vgl. Steinitz I, Nr. 15, S. 333. Der Beweis ist hier nur der Vollständigkeit halber, mit geringer Modifikation, wiedergegeben. Das gleiche gilt von Satz 5 in § 2, der eine einfache Folgerung daraus ist; vgl. Steinitz I, Nr. 16, S. 335.

Innerhalb des Ringes der $3n$-reihigen Matrizen soll nun die Matrix durch unimodulare vordere und hintere Faktoren auf eine einfache Normalform gebracht werden. Was das für A selbst bedeutet, wird unten diskutiert. Die E.-T. und die Spalten- und die Zeilenklasse bleiben bei diesen Umformungen unverändert. Wir nehmen A zunächst von einem Range $r \geqq 2$ an. $\mathfrak{e}$ sei der erste E.-T. von A, und $\mathfrak{a}$ sei ein ganz beliebiges ganzes Ideal. Nach Hilfssatz 3 läßt sich eine durch $\mathfrak{a}$ teilbare ganzzahlige Zeile $\mathfrak{x}$ finden, sodaß die Zeile $\mathfrak{x}A$ den Teiler $\mathfrak{e}\mathfrak{a}$ bekommt. Die Zeilenkombination $\mathfrak{x}A$ addieren wir zur ersten Zeile. Das läßt sich bekanntlich, ebenso wie alle folgenden Operationen, durch Anbringung unimodularer Faktoren erreichen. Sei weiter $\mathfrak{b}$ ein beliebiges ganzes Ideal, das mit $\mathfrak{a}$ in derselben Klasse liegt, $\mathfrak{b} \sim \mathfrak{a}$, und für das $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = 1$. Dann ist $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$ Hauptideal und kann durch eine Zahl repräsentiert werden. Da es auf die Auswahl dieser Zahl unter Assoziierten nicht ankommt, wollen wir der Einfachheit halber hier und später in analogen Fällen eine Zahl nur durch das zugehörige Hauptideal angeben. Die Zeile $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\mathfrak{x}$ besteht aus ganzen Zahlen mit dem g. g. T. $\mathfrak{b}$. Die Zeilenkombination $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\mathfrak{x}A$ mit dem g. g. T. $\mathfrak{e}\mathfrak{b}$ addieren wir zur zweiten Zeile. Dann werden die erste und die zweite Zeile proportional. Sei $\mathfrak{c}$ ein beliebiges ganzes Ideal derart, daß $\mathfrak{e}\mathfrak{a}\mathfrak{c} \sim 1$. Da der g. g. T. der ersten Zeile $\mathfrak{e}\mathfrak{a}$ ist, läßt sich jede $\mathfrak{e}\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ erzeugende Zahl aus der ersten Zeile ganzzahlig linear kombinieren, und zwar nach Hilfssatz 2 sogar mit lauter durch $\mathfrak{c}$ teilbaren Faktoren. Wir addieren die entsprechende Spaltenkombination zur ersten Spalte und erhalten an der obersten Stelle eine Zahl mit der Idealdarstellung $\mathfrak{e}\mathfrak{a}\mathfrak{c}$. An der zweiten Stelle erscheint analog $\mathfrak{e}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$. Dann folgen Nullen bis zu den untersten n Stellen; dort erscheint eine durch $\mathfrak{e}\mathfrak{c}$ teilbare Teilspalte. Endlich sei $\mathfrak{f}$ ein ganzes Ideal mit $\mathfrak{f} \sim \mathfrak{c}$, $(\mathfrak{f}, \mathfrak{c}) = 1$. Wir ersetzen die eben benutzte Spaltenkombination durch ihr $\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{c}}$-faches Multiplum und addieren es zur zweiten Spalte. Dort entstehen zuerst $\mathfrak{e}\mathfrak{a}\mathfrak{f}$, $\mathfrak{e}\mathfrak{b}\mathfrak{f}$, dann eine Reihe von Nullen und endlich eine durch $\mathfrak{e}\mathfrak{f}$ teilbare Teilspalte. Insgesamt ergibt sich folgendes Bild:

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} \mathfrak{e}\mathfrak{a}\mathfrak{c} & \mathfrak{e}\mathfrak{a}\mathfrak{f} & & \dots\ \mathfrak{x}A\ \dots \\ \mathfrak{e}\mathfrak{b}\mathfrak{c} & \mathfrak{e}\mathfrak{b}\mathfrak{f} & & \dots\ \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\mathfrak{x}A\dots \\ \hline & & & \\ \hline \vdots & \vdots & & A' \end{array}\right)\begin{array}{l}\}n\\ \}n\\ \}n\end{array}$$

$$\underbrace{\quad}_{n} \quad \underbrace{\quad}_{n} \quad \underbrace{\quad}_{n}$$

Leere Stellen bedeuten Nullen, Punkte im allgemeinen von Null verschiedene Zahlen; die zweireihige Teilmatrix links oben ist so zu wählen, daß ihr Rang 1 wird. Da die rechte obere Teilzeile durch $\mathfrak{e}\mathfrak{a}$ teilbar ist und $\mathfrak{e}\mathfrak{a}$ wegen $(\mathfrak{f}, \mathfrak{c}) = 1$ auch der g. g. T. der ersten beiden Zahlen der vollen ersten Zeile ist, kann man die ganze rechte Teilzeile durch Subtraktion passender ganzzahliger Kombinationen der ersten beiden Spalten zum Verschwinden bringen. Dabei verschwindet aus Proportionalitätsgründen auch die zweite rechte Teilzeile. In gleicher Weise kann man die beiden linken unteren Teilspalten zum Verschwinden bringen. Es bleibt dann nur noch links oben die angegebene zweireihige Matrix vom Range 1 und rechts unten eine n-reihige Matrix A' übrig. Die

zweireihige Matrix hat den (einzigen) E.-T. $\mathfrak{e}$, denn die vier ganzen Ideale $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{f}$, $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}\mathfrak{f}$ können wegen $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = (\mathfrak{f}, \mathfrak{c}) = 1$ offenbar keinen gemeinsamen Primteiler besitzen. A' ist vom Range $r-1$, und der g. g. T. $\mathfrak{e}'$ der Elemente von A' ist ein Vielfaches von $\mathfrak{e}$. Ist nun noch $r-1 \geqq 2$, so verfahren wir mit A' in ganz analoger Weise wie mit A. Die Fortsetzung des Verfahrens ergibt schließlich eine Matrix folgender Gestalt:

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & A_{r-1} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & A^* \end{pmatrix}, \qquad A_\nu = \begin{pmatrix} \mathfrak{e}_\nu \mathfrak{a}_\nu \mathfrak{c}_\nu & \mathfrak{e}_\nu \mathfrak{a}_\nu \mathfrak{f}_\nu \\ \mathfrak{e}_\nu \mathfrak{b}_\nu \mathfrak{c}_\nu & \mathfrak{e}_\nu \mathfrak{b}_\nu \mathfrak{f}_\nu \end{pmatrix} \text{ vom Rang 1,} \qquad (\nu = 1, \ldots, r-1),$$

wo A^* vom Rang 1 ist. Dabei ist, wenn $\mathfrak{e}_r$ der (einzige) E.-T. von A^* ist, $\mathfrak{e}_1 | \mathfrak{e}_2 | \cdots | \mathfrak{e}_r$, und hieraus erkennt man ohne weiteres $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_r$ als die E.-T. der Matrix und somit als die E.-T. von A.

Wir setzen jetzt $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_r$. Ist, wie wir annehmen dürfen, die erste Spalte $\mathfrak{s}$ von A^* von der Nullspalte verschieden, so ist ihr g. g. T. von der Form $\mathfrak{e}\mathfrak{t}$ mit ganzem $\mathfrak{t}$. Die anderen Spalten $\mathfrak{s}', \mathfrak{s}'', \ldots$ von A^* sind zu $\mathfrak{s}$ proportional. Für ihre g. g. T. $\mathfrak{e}\mathfrak{t}', \ldots$ gilt $\mathfrak{t} \sim \mathfrak{t}' \sim \ldots, (\mathfrak{t}, \mathfrak{t}', \ldots) = 1$, und sie selbst sind gegeben durch $\mathfrak{s}' = \frac{\mathfrak{t}'}{\mathfrak{t}} \mathfrak{s}, \ldots$. Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges ganzes Ideal mit $\mathfrak{e}\mathfrak{a}\mathfrak{t} \sim 1$, so läßt sich jede $\mathfrak{e}\mathfrak{a}\mathfrak{t}$ erzeugende Zahl ganzzahlig aus $\mathfrak{s}$ kombinieren, und zwar nach Hilfssatz 2 so, daß die Faktoren sämtlich durch $\mathfrak{a}$ teilbar sind. Addieren wir die entsprechende Linearkombination von Zeilen zur ersten der bisher noch ganz mit Nullen besetzten Zeilen, so ergeben sich dort die Zahlen $\mathfrak{e}\mathfrak{a}\mathfrak{t}, \mathfrak{e}\mathfrak{a}\mathfrak{t}', \ldots$, also eine Zeile vom g. g. T. $\mathfrak{e}\mathfrak{a}$. Jetzt können wir genau so fortfahren wie oben bei der Konstruktion der zweireihigen A_ν und erhalten eine ebenso gebaute zweireihige Matrix A_r. Der einzige Unterschied besteht darin, daß wir in der Wahl der $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{r-1}$ gänzlich frei waren, bei $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_r$ jedoch an die Bedingung $\mathfrak{e}_r \mathfrak{a}_r \mathfrak{t} \sim 1$ gebunden sind. In der rechten unteren Ecke ergibt sich dabei eine Matrix vom Range Null, also die Nullmatrix, sodaß wir insgesamt die folgende Normalform[8]) erhalten:

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & A_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_\nu = \begin{pmatrix} \mathfrak{e}_\nu \mathfrak{a}_\nu \mathfrak{c}_\nu & \mathfrak{e}_\nu \mathfrak{a}_\nu \mathfrak{f}_\nu \\ \mathfrak{e}_\nu \mathfrak{b}_\nu \mathfrak{c}_\nu & \mathfrak{e}_\nu \mathfrak{b}_\nu \mathfrak{f}_\nu \end{pmatrix} \text{ vom Rang 1,}$$

$$\mathfrak{a}_\nu \sim \mathfrak{b}_\nu, \quad (\mathfrak{a}_\nu, \mathfrak{b}_\nu) = 1, \qquad \mathfrak{c}_\nu \sim \mathfrak{f}_\nu, \quad (\mathfrak{c}_\nu, \mathfrak{f}_\nu) = 1 .$$

Die „Zweiermatrizen“ A_ν stellen übrigens die allgemeinsten zweireihigen Matrizen vom Rang 1 mit dem E.-T. $\mathfrak{e}_\nu$ dar. A_ν hat ersichtlich die Spaltenklasse $\mathfrak{S}_\nu \sim \mathfrak{e}_\nu \mathfrak{c}_\nu \sim \mathfrak{a}_\nu^{-1}$ und die Zeilenklasse $\mathfrak{Z}_\nu \sim \mathfrak{e}_\nu \mathfrak{a}_\nu \sim \mathfrak{c}_\nu^{-1}$. Die volle Matrix hat die Spalten- und Zeilenklassen

$$\mathfrak{S} \sim \prod_{\nu=1}^{r} \mathfrak{S}_\nu \sim \prod_{\nu=1}^{r} \frac{1}{\mathfrak{a}_\nu}, \qquad \mathfrak{Z} \sim \prod_{\nu=1}^{r} \mathfrak{Z}_\nu \sim \prod_{\nu=1}^{r} \frac{1}{\mathfrak{c}_\nu}.$$

Man erkennt jetzt, warum wir oben bei der Konstruktion von A_r für $\mathfrak{a}_r$ an eine bestimmte Idealklasse gebunden waren: $\mathfrak{a}_r$ mußte so gewählt werden, daß $\Pi \mathfrak{a}_\nu^{-1} \sim \mathfrak{S}$ wird. Zusammenfassend können wir folgendes sagen:

Satz 4. *Die Elementarteiler $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ einer n-reihigen Matrix A vom Range r mit der Spaltenklasse $\mathfrak{S}$ und der Zeilenklasse $\mathfrak{Z}$ bilden eine Vielfachenkette $\mathfrak{e}_1 | \mathfrak{e}_2 | \cdots | \mathfrak{e}_n$. A läßt*

[8]) Diese Normalform ist von der von Krull angegebenen nur in der Bezeichnung verschieden; dort wird, wie unten erörtert, für $\nu = 1, \ldots, r-1$ $\mathfrak{c}_\nu = 1, \mathfrak{f}_\nu = 0$ angenommen, so daß diese A_ν einspaltig werden.

sich im Ringe aller $3n$-reihigen Matrizen unimodular auf die Normalform $(\divideontimes)$ überführen, wobei die Hilfsideale $\mathfrak{a}_\nu, \mathfrak{b}_\nu, \mathfrak{c}_\nu, \mathfrak{f}_\nu$ innerhalb der angegebenen Bedingungen beliebig gewählt werden können, jedoch mit der Einschränkung

$$\mathfrak{S} \prod_{\nu=1}^{r} \mathfrak{a}_\nu \sim 1, \qquad \mathfrak{Z} \prod_{\nu=1}^{r} \mathfrak{c}_\nu \sim 1;$$

jede dieser beiden Relationen ist eine Folge der anderen.

Aus diesem Satz folgt ohne weiteres, daß man zwei n-reihige Matrizen A' und A mit den gleichen E.-T. und der gleichen Spalten- und der gleichen Zeilenklasse durch unimodulare $3n$-reihige Matrizen in einander überführen kann, daß also A' und A, als $3n$-reihige Matrizen aufgefaßt, äquivalent sind. Es bestehen also Gleichungen

$$P_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} = R_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} S_0,$$

mit unimodularen P_0, Q_0, R_0, S_0. Zerlegt man diese vier Matrizen in gleicher Weise wie $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ je in vier Teilmatrizen, so folgen Gleichungen

$$PA'Q = A, \qquad A' = RAS$$

mit n-reihigen P, Q, R, S, die jedenfalls ganzzahlig sind, über deren Determinante man aber im allgemeinen nichts aussagen kann. Die Gleichungen besagen, daß A' und A wechselseitig teilbar sind, sodaß wir feststellen können:

Resultat I. *Für die wechselseitige Teilbarkeit zweier Matrizen ist die Gleichheit entsprechender Elementarteiler und die Gleichheit der Spaltenklassen und (als Folge davon) die Gleichheit der Zeilenklassen notwendig und hinreichend.*

Neben den beiden letzten Gleichungen ergeben sich oben die beiden weiteren:

$$PA' = AS, \qquad A'Q = RA.$$

Nennen wir zwei Matrizen B' und B wechselseitig *linksteilbar*, wenn Beziehungen der Form $B' = TB$, $B = UB'$ mit ganzzahligen T, U existieren, und im entsprechenden Falle wechselseitig *rechtsteilbar*, so folgt aus der ersten und vierten der obigen vier Gleichungen, daß $A'Q$ und A wechselseitig linksteilbar sind, aus der zweiten und vierten, daß A' und RA wechselseitig rechtsteilbar sind, wegen $A'Q = RA$ also, daß man zu den beiden wechselseitig teilbaren Matrizen A' und A stets eine Matrix B $(= A'Q = RA)$ finden kann, sodaß A und B wechselseitig links-, und B und A' wechselseitig rechtsteilbar sind. Von dieser Bemerkung werden wir in § 2 Gebrauch machen.

Da für $\nu = 1, \ldots, r-1$ $\mathfrak{a}_\nu$ ganz beliebig war, kann man insbesondere $\mathfrak{a}_\nu = 1$ und dann $\mathfrak{b}_\nu = 0$ wählen. Die Zweiermatrizen A_ν bestehen dann nur aus einer mit von Null verschiedenen Elementen besetzten Spalte. Ebenso kann man auch $\mathfrak{c}_\nu = 1$ und darauf $\mathfrak{f}_\nu = 0$ wählen, wenn man vorher $\mathfrak{a}_\nu$ so gewählt hat, daß $\mathfrak{e}_\nu \mathfrak{a}_\nu \sim 1$. Beide Vereinfachungen gleichzeitig lassen sich nur dann anwenden, wenn $\mathfrak{e}_\nu = (e_\nu)$ Hauptideal ist. Sind insbesondere alle $\mathfrak{e}_\nu$ Hauptideale und die Spaltenklasse, also auch die Zeilenklasse, die Hauptklasse, so ergibt sich auf diese Weise die aus dem Rationalen bekannte Normalform [9])

$$\begin{pmatrix} e_1 & & \\ & \ddots & \\ & & e_r \end{pmatrix}.$$

[9]) Es sei bemerkt, daß im rationalen Fall die Normalform sich viel einfacher gewinnen läßt als durch Spezialisierung vorstehender Schlüsse. Vgl. etwa H. Hasse, Aufgabensammlung zur Höheren Algebra, Berlin und Leipzig 1934, **2**, § 1, Aufg. 36—41.

Bei regulären n-reihigen Matrizen, solchen mit nicht verschwindender Determinante, ist natürlich $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{Z} \sim 1$. Zwei solche sind also dann und nur dann wechselseitig teilbar, wenn sie in den E.-T. übereinstimmen. Für solche Matrizen kann man weiter aus der Gleichung $PA'Q = A$ durch Übergang zu den Determinanten schließen, daß P und Q unimodular sind, daß also A' und A sogar äquivalent sind. Gegenseitige Teilbarkeit und Äquivalenz besagen also in diesem Falle trivialerweise dasselbe. In § 2 werden wir dieselbe Tatsache auch für beliebige Matrizen beweisen, doch sind dazu besondere Schlüsse erforderlich [10]).

§ 2. Äquivalenz.

Satz 5. *Eine ganzzahlige teilerfremde Spalte kann durch Anfügung von Spalten, eine ganzzahlige teilerfremde Zeile durch Anfügung von Zeilen zu einer unimodularen Matrix ergänzt werden* [7]).

Beweisen wir etwa das letztere. $a_1, \ldots, a_n$ seien ganze teilerfremde Zahlen und etwa $a_1 \neq 0$. Fügt man eine aus zunächst noch Unbestimmten bestehende Zeile $x_1, \ldots, x_n$ zu dieser Zeile hinzu, so ergibt die Aufstellung der zweireihigen Unterdeterminanten ein Linearformensystem, das mindestens den Rang 2 hat, da z. B. die beiden mit x_1, x_2 und x_1, x_3 gebildeten Formen linear unabhängig sind. Da der größte gemeinsame Koeffiziententeiler 1 ist, kann man nach Hilfssatz 3 ganze $x_1, \ldots, x_n$ so bestimmen, daß die zweireihigen Unterdeterminanten relativ prim werden. Jetzt kann man in entsprechender Weise eine weitere ganzzahlige Zeile hinzufügen, derart, daß auch die dreireihigen Unterdeterminanten relativ prim werden. Fährt man so fort, so bekommt man schließlich $n - 1$ ganzzahlige Zeilen, deren n $(n-1)$-reihige Unterdeterminanten relativ prim sind. Die Hinzufügung einer weiteren Zeile von Unbestimmten und die Aufstellung der Determinante ergibt eine Linearform mit teilerfremden Koeffizienten. Man kann die Determinante also durch Einsetzung passender ganzer Zahlen für die Unbestimmten gleich einer beliebigen Einheit machen. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 6. *Jede Matrix A vom Range r läßt sich unimodular in eine höchstens in den ersten $r+1$ Spalten und $r+1$ Zeilen mit von Null verschiedenen Elementen besetzte Matrix überführen. Ist die Spaltenklasse von A die Hauptklasse, so kann auch noch die $(r+1)$-te Zeile, ist die Zeilenklasse die Hauptklasse, so auch noch die $(r+1)$-te Spalte zu Null gemacht werden.*

Beweis. Sei der Rang von A höchstens $n - 2$. Dann gibt es zwei linear unabhängige Spalten $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ von n Zahlen mit $A\mathfrak{x}_1 = A\mathfrak{x}_2 = 0$. Beide dürfen aus ganzen Zahlen bestehend angenommen werden. Wie man weiter durch Anbringung eines passenden Proportionalitätsfaktors an $\mathfrak{x}_2$ sieht, kann der g. g. T. der $2n$ Elemente von $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ als 1 angenommen werden. Das Gleichungssystem $\mathfrak{x} = x_1\mathfrak{x}_1 + x_2\mathfrak{x}_2$ mit den Unbestimmten x_1, x_2 ist dann vom Range 2 und vom Koeffiziententeiler 1; x_1, x_2 können also nach Hilfssatz 3 so gewählt werden, daß die Zahlen von $\mathfrak{x}$ teilerfremd werden. In analoger Weise kann man eine aus ganzen teilerfremden Zahlen bestehende Zeile $\mathfrak{y}$ finden, sodaß $\mathfrak{y}A = 0$. Ergänzt man nun $\mathfrak{x}$ nach dem vorigen Satz durch Vorsetzen von $n - 1$ Spalten zu einer unimodularen Matrix X, $\mathfrak{y}$ durch Darübersetzen von $n - 1$ Zeilen zu einer unimodularen Matrix Y, so bekommt man in

$$YAX = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

---

[10]) Auch Krull führt über seinen Äquivalenzbeweis hinaus in dieser Richtung liegende Sonderbetrachtungen durch, die für die Anwendung auf die Modultheorie notwendig sind. A. a. O. § 7; vgl. dort besonders Anm. [17]).

eine höchstens in der linken oberen $(n-1)$-reihigen Teilmatrix mit von Null verschiedenen Elementen besetzte Matrix. Im Falle $r = n-2$ ist damit der erste Teil des Satzes bewiesen. Im Falle $r \leqq n-3$ kann man mit A' ebenso verfahren wie mit A und erhält in der Form

$$\begin{pmatrix} Y' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine mit A unimodular zusammenhängende Matrix, welche höchstens in der $(n-2)$-reihigen linken oberen Teilmatrix mit von Null verschiedenen Elementen besetzt ist. Die Fortsetzung des Verfahrens ergibt den ersten Teil des Satzes.

Hiernach können wir uns beim Beweise des zweiten Teiles auf den Fall $r = n-1$ beschränken. Es möge A die Spaltenklasse $\mathfrak{S} \sim 1$ haben. Dann erhält man eine Zeile $\mathfrak{y}$ mit $\mathfrak{y}A = 0$, indem man die Reihe der n aus irgendwelchen festen $n-1$ Spalten gebildeten $(n-1)$-reihigen Unterdeterminanten aufstellt. Der g. g. T. dieser n Unterdeterminanten gehört nach Voraussetzung der Hauptklasse an, man darf daher $\mathfrak{y}$ ganzzahlig und vom g. g. T. 1 annehmen. Jetzt schließt man genau wie oben, daß man $\mathfrak{y}$ zu einer unimodularen Matrix Y ergänzen und damit in YA die letzte Zeile zu Null machen kann. Entsprechendes gilt für den Fall $\mathfrak{Z} \sim 1$. Ist $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{Z} \sim 1$, so kann man also A in eine höchstens in einer r-reihigen Teilmatrix mit von Null verschiedenen Elementen besetzte Matrix überführen. Damit ist der Satz bewiesen. Daß man im Falle $\mathfrak{S} \nsim 1$ oder $\mathfrak{Z} \nsim 1$ nicht mit r von Null verschiedenen Zeilen bzw. Spalten auskommt, liegt auf der Hand[11]).

Seien nun A' und A wechselseitig teilbare Matrizen. Wir wollen zeigen, daß A' und A sogar äquivalent sind, also durch unimodulare Faktoren zusammenhängen. Für Matrizen vom Höchstrang ist das bereits bewiesen; sei also der Rang r von A' und A kleiner als n. Gemäß Satz 6 führen wir zunächst A' und A in äquivalente Matrizen über, die höchstens in der linken oberen $(r+1)$-reihigen Teilmatrix A_0' bzw. A_0 von Null verschieden sind. Wenn dann A_0' und A_0 äquivalent sind, $A_0' = P_0 A_0 Q_0$ mit $(r+1)$-reihigen unimodularen P_0, Q_0, so auch A' und A zufolge der Gleichung

$$\begin{pmatrix} A_0' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

in der die Faktoren rechts wieder unimodular sind. Wir dürfen im folgenden also A' und A von vornherein vom Range $r = n-1$ annehmen.

Wir sahen oben im Anschluß an Resultat I, daß zu A' und A eine Matrix B existiert, sodaß A' und B wechselseitig rechts-, und B und A wechselseitig linksteilbar sind. Wir brauchen daher nur zu zeigen, daß A' und B einerseits und B und A andererseits äquivalent sind. Wir zeigen etwa das letztere.

Seien also A und B vom Range $n-1$ und wechselseitig linksteilbar, $B = SA$, $A = TB$ mit ganzzahligen S und T. Dann existiert eine von der Nullzeile verschiedene Zeile $\mathfrak{z}_1$ mit $\mathfrak{z}_1 A = 0$, und es ist dann und nur dann $\mathfrak{z} A = 0$, wenn $\mathfrak{z}$ zu $\mathfrak{z}_1$ proportional ist. Wir dürfen $\mathfrak{z}_1$ als ganzzahlig mit dem g. g. T. t_1 annehmen. Ist $(t_2, t_1) = 1$, so bekommt man durch Multiplikation von $\mathfrak{z}_1$ mit einer Zahl der Idealzerlegung $t_2 t_1^{-1}$

[11]) Hier liegt der Grund dafür, daß bei algebraischen Körpern aus der wechselseitigen Teilbarkeit noch nicht, wie im rationalen Fall, ohne weiteres die Äquivalenz folgt. Wenn $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{Z} \sim 1$, kann man, wie eben gezeigt, eine Matrix vom Range r auf eine r-reihige Teilmatrix einengen und hat damit das Problem auf den am Schluß von § 1 charakterisierten Fall regulärer Matrizen zurückgeführt; im allgemeinen geht das aber nicht. Das ist auch der Grund dafür, daß der Krullsche Äquivalenzbegriff den hier zugrunde gelegten nicht umfaßt.

eine ganzzahlige Zeile $\mathfrak{z}_{\delta 2}$ vom g. g. T. t_2, für die ebenfalls $\mathfrak{z}_{\delta 2} A = 0$. Aus $\mathfrak{z}_{\delta 1}$ und $\mathfrak{z}_{\delta 2}$ kann man dann jede andere ganzzahlige Zeile $\mathfrak{z}$ dieser Art mit dem g. g. T. t in der Form $\mathfrak{z} = x_1 \mathfrak{z}_{\delta 1} + x_2 \mathfrak{z}_{\delta 2}$ mit ganzzahligen x_1, x_2 kombinieren. Ist nämlich a_1 eine von Null verschiedene Zahl von $\mathfrak{z}_{\delta 1}$ mit der Idealdarstellung $t_1 \mathfrak{a}$ mit ganzem $\mathfrak{a}$, so besitzen die an entsprechender Stelle in $\mathfrak{z}_{\delta 2}$ und $\mathfrak{z}$ stehenden Elemente a_2, a die Idealdarstellungen $t_2 \mathfrak{a}$, $t\mathfrak{a}$. Wegen $(t_1, t_2) = 1$ kann man daher a in der Form $a = x_1 a_1 + x_2 a_2$ darstellen, und für die Zeilen gilt dann, da sie einander proportional sind, $\mathfrak{z} = x_1 \mathfrak{z}_{\delta 1} + x_2 \mathfrak{z}_{\delta 2}$. Jetzt sei $\mathfrak{x}$ eine beliebige ganzzahlige Zeile [12]). Aus $A = TB = TSA$ folgt $\mathfrak{x} A = (\mathfrak{x} T) SA$. $\mathfrak{x} T = \mathfrak{y}$ ist wieder eine ganzzahlige Zeile. Es folgt $(\mathfrak{x} - \mathfrak{y} S) A = 0$. Die Zeile $\mathfrak{x} - \mathfrak{y} S$ gehört daher zu den eben betrachteten Zeilen $\mathfrak{z}$, läßt sich also aus $\mathfrak{z}_{\delta 1}$ und $\mathfrak{z}_{\delta 2}$ ganzzahlig kombinieren. Da $\mathfrak{y} S$ eine Zeilenkombination von S ist, läßt sich $\mathfrak{x}$ selbst aus den Zeilen von S und $\mathfrak{z}_{\delta 1}$ und $\mathfrak{z}_{\delta 2}$ ganzzahlig kombinieren. Nennen wir die aus S durch Anfügung von $\mathfrak{z}_{\delta 1}$ und $\mathfrak{z}_{\delta 2}$ entstehende Matrix mit n Spalten und $n + 2$ Zeilen S_0, und wählen wir für $\mathfrak{x}$ nacheinander die n Zeilen der n-reihigen Einheitsmatrix E_n, so ergibt sich die Existenz einer Matrix Z mit $n + 2$ Spalten und n Zeilen, sodaß

$$Z \cdot S_0 = E_n .$$

Durch Übergang zur n-ten abgeleiteten Gleichung folgt daraus, daß S_0 den n-ten D.-T. 1 hat.

Ersetzt man in S die Zeilen nacheinander durch $\mathfrak{z}_{\delta 1}$ bzw. $\mathfrak{z}_{\delta 2}$, so sind die so entstehenden Matrizen S_ν, $S'_\mu (\nu, \mu = 1, \ldots, n)$ zusammen mit S die einzigen n-reihigen Teilmatrizen von S_0, die eine von Null verschiedene Determinante haben können. Es ist also $(|S|, |S_\nu|, |S'_\mu|) = 1$. Bezeichnet s_{ik} das allgemeine Element von S, $\bar{s}_{ik}$ das algebraische Komplement von s_{ik} in S, so ist

$$|S_\nu| = \sum_{k=1}^{n} z_k \bar{s}_{\nu k} , \qquad |S'_\mu| = \sum_{k=1}^{n} z'_k \bar{s}_{\mu k} ,$$

wenn z_k bzw. z'_k die Elemente von $\mathfrak{z}_{\delta 1}$ bzw. $\mathfrak{z}_{\delta 2}$ bezeichnen. Es folgt

$$\sum_{\nu} |S_\nu| s_{\nu\lambda} = \sum_{\nu, k} z_k \bar{s}_{\nu k} s_{\nu\lambda} = z_\lambda |S| , \qquad \sum_{\mu} |S'_\mu| s_{\mu\lambda} = \sum_{\mu, k} z'_k \bar{s}_{\mu k} s_{\mu\lambda} = z'_\lambda |S| .$$

Daher kann, weil die z_λ und z'_λ zueinander prim sind, kein Primfaktor in allen $|S_\nu|$ und $|S'_\mu|$ aufgehen, ohne auch in $|S|$ aufzugehen. Also ist auch $(|S_\nu|, |S'_\mu|) = 1$, und man kann Zahlen a_ν, b_ν finden, so daß

$$|S| + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu |S_\nu| + \sum_{\mu=1}^{n} b_\mu |S'_\mu| = 1 .$$

Dies ist gerade die Determinante der Matrix

$$S_0 = S + \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_\nu \end{pmatrix} \mathfrak{z}_{\delta 1} + \begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{pmatrix} \mathfrak{z}_{\delta 2} .$$

Wegen $\mathfrak{z}_{\delta 1} A = \mathfrak{z}_{\delta 2} A = 0$ kann man nun in $B = SA$ die Matrix S durch die unimodulare Matrix S_0 ersetzen, $B = S_0 A$. B und A sind also äquivalent (sogar linksäquivalent), was zu zeigen war. Damit ist folgendes bewiesen:

Resultat II. *Zwei n-reihige Matrizen A' und A sind dann und nur dann äquivalent, wenn sie wechselseitig teilbar sind; für die Äquivalenz ist notwendig und hinreichend die Übereinstimmung in entsprechenden Elementarteilern und in der Spaltenklasse und (als Folge davon) in der Zeilenklasse.*

Damit sind die E.-T. und die Spalten- und die Zeilenklasse als charakteristische Invarianten für die Klassen äquivalenter Matrizen erkannt. Es bleibt noch festzustellen, ob zu jedem vorgelegten System von solchen Invarianten, das den Be-

[12]) Vgl. Steinitz II, Nr. 66, S. 341.

dingungen $\mathfrak{e}_1 | \ldots | \mathfrak{e}_n$, $\mathfrak{S}\mathfrak{Z} \sim \mathfrak{d}_r$ genügt, wirklich Matrizen mit diesen Invarianten existieren. Zunächst zeigt die Normalform von § 1, daß sicher $3n$-reihige Matrizen dieser Art existieren. Diese kann man nach Satz 6 unimodular in n-reihige Matrizen überführen. Im Falle $r = n$ muß dabei natürlich $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{Z} \sim 1$ sein. Es gilt also:

Satz 7. *Zu gegebenen Elementarteilern* $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ *und gegebener Spaltenklasse* $\mathfrak{S}$ *und gegebener Zeilenklasse* $\mathfrak{Z}$ *existieren stets n-reihige Matrizen mit diesen Invarianten, sofern nur*

1) $\mathfrak{e}_1 | \cdots | \mathfrak{e}_r \neq 0$, $\mathfrak{e}_{r+1} = \cdots = \mathfrak{e}_n = 0$,
2) $\mathfrak{S}\mathfrak{Z} \sim \mathfrak{d}_r = \mathfrak{e}_1 \cdots \mathfrak{e}_r$,
3) *im Falle* $r = n$: $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{Z} \sim 1$.

Man kann übrigens nachträglich auch leicht n-reihige Normalformen mit vorgegebenen Invarianten konstruieren. Im Falle $r < n$ kann man dazu etwa folgendermaßen vorgehen. $\mathfrak{a}$ sei ein ganzes Ideal, so daß $\mathfrak{d}_r\mathfrak{a} \sim \mathfrak{Z}$, $\mathfrak{b}$ sei ebenfalls ganz mit den Bedingungen $\mathfrak{b} \sim \mathfrak{a}$, $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = 1$. Die ganzen Ideale $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_r, \mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_r$ seien so gewählt, daß

$$\mathfrak{e}_1\mathfrak{c}_1 \sim \cdots \sim \mathfrak{e}_{r-1}\mathfrak{c}_{r-1} \sim \mathfrak{e}_r\mathfrak{a}\mathfrak{c}_r \sim 1,$$
$$\mathfrak{e}_1\mathfrak{f}_1 \sim \cdots \sim \mathfrak{e}_{r-1}\mathfrak{f}_{r-1} \sim \mathfrak{e}_r\mathfrak{a}\mathfrak{f}_r \sim 1,$$
$$\Big(\prod_{\nu=1}^{r} \mathfrak{c}_\nu,\ \prod_{\nu=1}^{r} \mathfrak{f}_\nu\Big) = 1,$$

wie es offenbar möglich ist. Dann genügt die folgende Matrix:

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{e}_1\mathfrak{c}_1 & \mathfrak{e}_1\mathfrak{f}_1 & & & \\ & \mathfrak{e}_2\mathfrak{c}_2 & \mathfrak{e}_2\mathfrak{f}_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \mathfrak{e}_r\mathfrak{a}\mathfrak{c}_r & \mathfrak{e}_r\mathfrak{a}\mathfrak{f}_r \\ & & & \mathfrak{e}_r\mathfrak{b}\mathfrak{c}_r & \mathfrak{e}_r\mathfrak{b}\mathfrak{f}_r \end{pmatrix}.$$

Dabei sind von den Zahlen der Matrix wieder nur ihre Idealdarstellungen angegeben; die Zahlrepräsentanten sind beliebig, jedoch so zu wählen, daß die rechte untere zweireihige Teilmatrix den Rang 1 bekommt. Daß die E.-T. dieser Matrix gerade die gewünschten sind, ist offenbar. Für die Zeilenklasse ergibt sich bei Zugrundelegung der ersten r Zeilen die Idealklasse von $\mathfrak{d}_r\mathfrak{a}$, also wirklich die Klasse $\mathfrak{Z}$. — Diese und ähnliche r-reihige Normalformen erscheinen jedoch nicht geeignet, um darauf einen einfachen direkten Äquivalenzbeweis zu gründen.

§ 3. Teilbarkeit.

a) Notwendige Bedingungen. Die Teilbarkeitsbedingungen zerfallen wie die Äquivalenzbedingungen in einen auf die E.-T. und einen auf die Spalten- und Zeilenklassen bezüglichen Teil. Der erste Teil besagt, daß, wenn A' teilbar ist durch A, auch jeder E.-T. $\mathfrak{e}'_\nu$ durch den entsprechenden $\mathfrak{e}_\nu$ teilbar ist [13]). Zum Beweise betrachten wir

[13]) Im Falle des rationalen Körpers sind diese Bedingungen zuerst von G. Frobenius aufgestellt worden (Theorie der linearen Formen mit ganzen Koeffizienten. J. reine angew. Math. **88** (1880), S. 96), und zwar im Rahmen einer allgemeinen Modultheorie. In direkter und stark vereinfachter Form wurden sie dann von K. Hensel hergeleitet (Über die Elementarteiler componierter Systeme, J. reine angew. Math. **114** (1895), S. 109; ferner: Zur Theorie der Systeme, J. reine angew. Math. **126** (1903), S. 165). Bei der Teilbarkeitstheorie im Rationalen ist, im Gegensatz zur Äquivalenztheorie, die Aufstellung der notwendigen Bedingungen schwieriger als der Nachweis, daß sie auch hinreichend sind, der bei Anwendung der Normalform trivial ist. In einer neueren Arbeit (Über Systeme in einfachen Körpern, J. reine angew. Math. **160** (1929), S. 131) hat K. Hensel seine früheren Beweise abermals vereinfacht und außerdem auf eine abstrakte Grundlage gestellt, so daß sie auf einen beliebigen algebraischen Zahlkörper anwendbar sind (bei Auszeichnung der für ein Primideal $\mathfrak{p}$ ganzen Zahlen wird k ein einfacher Körper im

zunächst den speziellen Fall der Linksteilbarkeit, $A'' = PA$ mit ganzzahligem P, und beweisen die Behauptung $e_\nu \mid e_\nu''$ gesondert für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ des Körpers k. Es sei p eine genau einmal durch $\mathfrak{p}$ teilbare Zahl. Dann kann man A in der Form darstellen:

$$A = P_p A_0 Q_p \quad \text{mit} \quad A_0 = \begin{pmatrix} p^{e_1} & & \\ & \ddots & \\ & & p^{e_r} \end{pmatrix},$$

wo die Faktoren P_p, Q_p für $\mathfrak{p}$ unimodular sind, d. h. aus für $\mathfrak{p}$ ganzen Zahlen bestehen und eine durch $\mathfrak{p}$ nicht teilbare Determinante besitzen, und ferner $e_1 \leqq \cdots \leqq e_r$ die genauen Exponenten von $\mathfrak{p}$ in den E.-T. $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_r$ von A sind. Diese Normalform für $\mathfrak{p}$ ergibt sich in bekannter Weise analog wie die Normalform im rationalen Fall, wenn man an Stelle des gewöhnlichen Ganzheitsbegriffes den der Ganzheit für $\mathfrak{p}$ zugrunde legt. Dann wird

$$A'' = P P_p A_0 Q_p, \qquad A'' Q_p^{-1} = (P P_p) A_0.$$

Da auch Q_p^{-1} für $\mathfrak{p}$ unimodular ist, sind die $\mathfrak{p}$-Potenzen in den E.-T. in beiden Gleichungen dieselben. PP_p ist für $\mathfrak{p}$ ganzzahlig. Der Multiplikator A_0 bei PP_p bewirkt, daß die erste Spalte von PP_p mit p^{e_1}, die zweite mit p^{e_2}, usf. multipliziert wird. Stellt $p^{d_\nu''}$ die $\mathfrak{p}$-Potenz des ν-ten D.-T., $p^{e_\nu''}$ die des ν-ten E.-T. von A'' dar, so ergibt deshalb die Laplacesche Entwicklung einer beliebigen $(\nu+1)$-reihigen Unterdeterminante von $(PP_p)A_0$ nach der letzten Spalte, daß sie mindestens durch $p^{d_\nu'' + e_{\nu+1}}$ teilbar ist, daß also

$$d_{\nu+1}'' \geqq d_\nu'' + e_{\nu+1}, \qquad e_{\nu+1}'' \geqq e_{\nu+1}.$$

Durch Zusammenfassung aller dieser auf die einzelnen $\mathfrak{p}$ bezüglichen Ergebnisse folgt $e_\nu | e_\nu''$ für jedes $\nu = 1, \ldots, n$. Entsprechendes gilt für den Fall der Rechtsteilbarkeit. Man kann also von PA weiter auf $PAQ = A'$ schließen und bekommt so das gewünschte Resultat $e_\nu | e_\nu'$ für $\nu = 1, \ldots, n$.

Wir setzen jetzt voraus, daß der Rang r' von A' mit dem Rang r von A übereinstimmt. Dann hat auch PA denselben Rang. $\mathfrak{d}' = \mathfrak{d}_r'$, $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_r$, $\mathfrak{S}', \mathfrak{Z}'$, $\mathfrak{S}, \mathfrak{Z}$ seien die letzten D.-T. und die Spalten- und Zeilenklassen von A' und A. Da P ganzzahlig ist, ist der letzte D.-T. von PA ein Vielfaches von $\mathfrak{d}$, etwa $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_s$ mit ganzem $\mathfrak{d}_s$. Die Zeilenklasse von PA ist dieselbe, $\mathfrak{Z}$, wie die von A, die Spaltenklasse muß daher nach Satz 1 die Klasse $\mathfrak{S}\mathfrak{d}_s$ sein [6]). In gleicher Weise ergibt sich $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_s\mathfrak{d}_z = \mathfrak{d}'$ mit ganzem $\mathfrak{d}_z$ als letzter D.-T., $\mathfrak{S}\mathfrak{d}_s = \mathfrak{S}'$ als Spalten-, $\mathfrak{Z}\mathfrak{d}_z = \mathfrak{Z}'$ als Zeilenklasse von $A' = PAQ$. Hiernach liegt $\mathfrak{d}_s$ in der Klasse $\mathfrak{S}'\mathfrak{S}^{-1}$, $\mathfrak{d}_z$ in der Klasse $\mathfrak{Z}'\mathfrak{Z}^{-1}$, und es ergibt sich für die Teilbarkeit von A' durch A im Falle gleichen Ranges die folgende notwendige Bedingung: $\mathfrak{d}'\mathfrak{d}^{-1}$ muß in zwei ganzzahlige Faktoren $\mathfrak{d}_s\mathfrak{d}_z$ zerspaltbar sein, derart daß $\mathfrak{d}_s \sim \mathfrak{S}'\mathfrak{S}^{-1}$ und $\mathfrak{d}_z \sim \mathfrak{Z}'\mathfrak{Z}^{-1}$. Natürlich genügt es, $\mathfrak{d}_s \sim \mathfrak{S}'\mathfrak{S}^{-1}$ zu fordern; es folgt dann $\mathfrak{d}_z = \mathfrak{d}'\mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{d}_s^{-1} \sim \mathfrak{S}'\mathfrak{Z}'\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{Z}^{-1}\mathfrak{S}'^{-1}\mathfrak{S} \sim \mathfrak{Z}'\mathfrak{Z}^{-1}$.

b) Hinreichende Bedingungen. Um die gefundenen Bedingungen als hinreichend zu erweisen, müssen wir zunächst die in der Normalform von § 1 auftretenden Zweiermatrizen vom Rang 1

$$A = \begin{pmatrix} eac & eaf \\ ebc & ebf \end{pmatrix} \quad \text{mit} \begin{cases} a \sim b, & (a, b) = 1, \\ c \sim f, & (c, f) = 1 \end{cases}$$

Henselschen Sinne) und direkt das obige E.-T.-Kriterium (natürlich nicht auch das Idealklassenkriterium) liefern. Die oben angewandte Methode unterscheidet sich von der Henselschen dadurch, daß sie ohne Zerlegung in Elementarmatrizen auskommt.

behandeln. Ist A ein Teiler einer ebensolchen Matrix A' vom Rang 1, so lauten die Bedingungen in diesem Fall

1) $\mathfrak{e} \mid \mathfrak{e}'$,

2) $\dfrac{\mathfrak{e}'}{\mathfrak{e}} = \mathfrak{e}_s \mathfrak{e}_z$ mit ganzen $\mathfrak{e}_s \sim \dfrac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}'}$, $\quad \mathfrak{e}_z \sim \dfrac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{c}'}$.

Sei nun Σ ein System idealer Zahlen zu k [14]). Wir wählen in Σ beliebige Repräsentanten ε, α für die Ideale $\mathfrak{e}, \mathfrak{a}$. Aus den Zahlen von A ergeben sich dann in Σ Repräsentanten γ, δ, β für $\mathfrak{c}, \mathfrak{f}, \mathfrak{b}$ derart, daß (jetzt nicht nur im Sinne der Idealdarstellung, sondern im gewöhnlichen Gleichheitssinne)

$$A = \varepsilon \begin{pmatrix} \alpha\gamma & \alpha\delta \\ \beta\gamma & \beta\delta \end{pmatrix}.$$

Wegen $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (\mathfrak{c}, \mathfrak{f}) = 1$ gibt es in den Idealen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{f}$ in k gelegene Zahlen a, b, c, f mit $a - b = c - f = 1$. a ist durch α teilbar, $a = \alpha\xi$ mit ganzem ξ aus Σ, und analog gibt es Zahlen η, λ, μ in Σ mit $\alpha\xi - \beta\eta = \gamma\lambda - \delta\mu = 1$. Dann wird offenbar

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \eta \\ \beta & \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}.$$

Ebenso verfahren wir mit A' und bekommen eine Darstellung

$$A' = \begin{pmatrix} \alpha' & \eta' \\ \beta' & \xi' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma' & \delta' \\ \mu' & \lambda' \end{pmatrix}.$$

Endlich wählen wir in Σ einen Repräsentanten ε_s für $\mathfrak{e}_s$ und erhalten aus der Gleichung $\mathfrak{e}'\mathfrak{e}^{-1} = \mathfrak{e}_s\mathfrak{e}_z$ einen Repräsentanten ε_z für $\mathfrak{e}_z$ mit $\varepsilon'\varepsilon^{-1} = \varepsilon_s\varepsilon_z$. Eliminieren wir nun mittels der Gleichung $\varepsilon' = \varepsilon\varepsilon_s\varepsilon_z$ aus den beiden Darstellungen von A und A' die Zahlen ε und ε', so ergibt sich:

$$\begin{aligned} A' &= \begin{pmatrix} \alpha' & \eta' \\ \beta' & \xi' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \eta \\ \beta & \xi \end{pmatrix}^{-1} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma' & \delta' \\ \mu' & \lambda' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon_s\alpha'\xi & -\varepsilon_s\alpha'\eta \\ \varepsilon_s\beta\xi & -\varepsilon_s\beta'\eta \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_z\lambda\gamma' & \varepsilon_z\lambda\delta' \\ -\varepsilon_z\mu\gamma' & -\varepsilon_z\mu\delta' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hier stellt man ohne weiteres fest, daß die beiden Faktormatrizen von A in k liegen. Es ist z. B. $\varepsilon_s\alpha'\xi \sim \varepsilon_s\alpha'\alpha^{-1} \sim 1$, nach der Voraussetzung über ε_s. Daher ist in der Tat A' teilbar durch A, und die notwendigen Bedingungen 1) und 2) sind als hinreichend erwiesen.

Jetzt seien A' und A zwei beliebige n-reihige Matrizen, für welche die abgeleiteten notwendigen Bedingungen erfüllt sind. Um A' als teilbar durch A nachzuweisen, genügt es nach den Betrachtungen am Schluß von § 1, durch Anhängung von Nullreihen an A' und A in den Ring der $3n$-reihigen Matrizen überzugehen und dort den Teilbarkeitsnachweis zu führen. Aus der E.-T.-Bedingung $\mathfrak{e}_\nu \mid \mathfrak{e}'_\nu$ folgt zunächst für den Rang r von A und den Rang r' von A', daß $r' \leqq r$. Sei $r' < r$. Wir bringen A' auf eine beliebige Normalform, d. h. eine solche, in der die Hilfsideale $\mathfrak{a}'_\nu$, $\mathfrak{b}'_\nu$, $\mathfrak{c}'_\nu$, $\mathfrak{f}'_\nu$ beliebig gewählt sind, und dann A auf eine solche Normalform, daß für je zwei Zweiermatrizen A'_ν und $A_\nu (\nu = 1, \ldots, r')$ die notwendigen und hinreichenden Teilbarkeitsbedingungen erfüllt sind. Das ist der Fall, wenn man die $\mathfrak{a}_\nu$ etwa in solchen Idealklassen wählt, daß $\mathfrak{e}'_\nu \mathfrak{e}_\nu^{-1} \sim \mathfrak{a}_\nu \mathfrak{a}'^{-1}_\nu$. Eine solche Wahl ist in der Tat möglich, weil die allein zu erfüllende Bedingung $\mathfrak{S} \prod_{\nu=1}^{r} \mathfrak{a}_\nu^{-1} \sim 1$ für die Normalform von A durch passende Wahl der $\mathfrak{a}_\nu$ mit

[14]) Vgl. etwa E. Hecke, Theorie der algebraischen Zahlen, Leipzig 1923, § 33, S. 121/122.

$\nu = r'+1, \ldots, r$ sicher befriedigt werden kann. Jetzt ist ohne weiteres ersichtlich, daß die Normalform von A' durch die Normalform von A, also auch daß A' selbst durch A selbst teilbar ist.

Sei nun $r' = r$ und außer der E.-T.-Bedingung $\mathfrak{e}_\nu \mid \mathfrak{e}'_\nu$ sei weiter

$$\mathfrak{d}'_r \mathfrak{d}_r^{-1} = \mathfrak{d}_s \mathfrak{d}_z \quad \text{mit} \quad \mathfrak{d}_s \sim \mathfrak{S}' \mathfrak{S}^{-1}, \ \mathfrak{d}_z \sim \mathfrak{Z}' \mathfrak{Z}^{-1}.$$

Zu dieser Zerlegung von $\mathfrak{d}'_r \mathfrak{d}_r^{-1}$ existiert sicher, wenn auch im allgemeinen nicht eindeutig, eine Zerlegung der $\mathfrak{e}'_\nu \mathfrak{e}_\nu^{-1}$ derart, daß

$$\mathfrak{d}'_r \mathfrak{d}_r^{-1} = (\mathfrak{e}'_1 \mathfrak{e}_1^{-1}) \cdots (\mathfrak{e}'_r \mathfrak{e}_r^{-1}) = (\mathfrak{e}_{1s} \mathfrak{e}_{1z}) \cdots (\mathfrak{e}_{rs} \mathfrak{e}_{rz}),$$

$$\mathfrak{e}'_\nu \mathfrak{e}_\nu^{-1} = \mathfrak{e}_{\nu s} \mathfrak{e}_{\nu z} \qquad (\nu = 1, \ldots, r),$$

$$\prod_{\nu=1}^{r} \mathfrak{e}_{\nu s} = \mathfrak{d}_s, \quad \prod_{\nu=1}^{r} \mathfrak{e}_{\nu z} = \mathfrak{d}_z.$$

Nachdem wir A' auf eine beliebige Normalform gebracht haben, wählen wir für A eine solche, daß für die Idealklassen der $\mathfrak{a}_\nu$ gilt $\mathfrak{e}_{\nu s} \sim \mathfrak{a}_\nu \mathfrak{a}'^{-1}_\nu$. (Es folgt dann

$$\mathfrak{e}_{\nu z} \sim \mathfrak{e}'_\nu \mathfrak{e}_\nu^{-1} \mathfrak{e}_{\nu s}^{-1} \sim (\mathfrak{a}_\nu \mathfrak{c}_\nu)(\mathfrak{a}'_\nu \mathfrak{c}'_\nu)^{-1} \mathfrak{a}'_\nu \mathfrak{a}_\nu^{-1} \sim \mathfrak{c}_\nu \mathfrak{c}'^{-1}_\nu.)$$

Eine solche Wahl ist möglich, da

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} \prod_{\nu=1}^{r} \mathfrak{a}_\nu &\sim \mathfrak{S} \prod_{\nu} \mathfrak{e}_{\nu s} \mathfrak{a}'_\nu \\ &\sim \mathfrak{S} \mathfrak{S}' \mathfrak{S}^{-1} \prod_{\nu} \mathfrak{a}'_\nu \\ &\sim \mathfrak{S}' \prod_{\nu} \mathfrak{a}'_\nu \sim 1. \end{aligned}$$

Dann sind aber für je zwei entsprechende Zweiermatrizen die hinreichenden Teilbarkeitsbedingungen erfüllt, also ist die Normalform von A' durch die Normalform von A und damit A' durch A teilbar. Wir haben also:

Resultat III. *Für die Teilbarkeit von A' durch A ist notwendig die Teilbarkeit entsprechender Elementarteiler, $\mathfrak{e}_\nu \mid \mathfrak{e}'_\nu$. Im Falle verschiedenen Ranges ist das auch hinreichend; im Falle gleichen Ranges kommt als notwendig und hinreichend noch folgendes hinzu: der Quotient $\mathfrak{d}' \mathfrak{d}^{-1}$ der letzten Determinantenteiler muß so in zwei Faktoren $\mathfrak{d}_s \mathfrak{d}_z$ zerspaltbar sein, daß $\mathfrak{d}_s$ in $\mathfrak{S}' \mathfrak{S}^{-1}$ und (als Folge davon) $\mathfrak{d}_z$ in $\mathfrak{Z}' \mathfrak{Z}^{-1}$ liegt.*

Die im Spezialfall der Zweiermatrizen vom Rang 1 aufgewiesenen Faktoren, die A in A' überführen, sind vom Range 1 mit den E.-T. $\mathfrak{e}_s$ und $\mathfrak{e}_z$. In diesem Falle multiplizieren sich also die E.-T. bei der Multiplikation der Matrizen, was sonst natürlich keineswegs der Fall zu sein braucht. Im Falle beliebigen Ranges kann man auch die E.-T. der angegebenen Faktoren nicht mehr übersehen. Im Rationalen kann man den einen der Faktoren stets unimodular annehmen, den anderen so, daß er die komplementären E.-T. hat; beides ist im algebraischen Fall, wie die Teilbarkeitsbedingungen zeigen, im allgemeinen nicht mehr möglich.

Eingegangen 19. Januar 1934.

Über die Kennzeichnung algebraischer Funktionenkörper durch ihren Regularitätsbereich.

Von *Friedrich Karl Schmidt* in Göttingen.

---

1. Fragestellung. Für die Normalkörper endlichen Grades über einem algebraischen Zahlkörper k von endlichem Grad als Grundkörper gilt bekanntlich [1]) der folgende

Eindeutigkeitssatz. *Jeder Normalkörper N/k ist durch seinen Regularitätsbereich $\mathfrak{R}(N)$ eindeutig bestimmt.*

Dabei verstehe ich unter dem Regularitätsbereich $\mathfrak{R}(K)$ eines beliebigen algebraischen Oberkörpers K/k von endlichem Grad einfach die Menge aller Primideale von k, die in K in lauter verschiedene Primideale und darunter mindestens eines vom Relativgrad 1 aufgespalten werden. Der Regularitätsbereich $\mathfrak{R}(N)$ eines Normalkörpers besteht also aus allen Primidealen von k, die in N in lauter verschiedene Primideale vom Relativgrad 1 zerfallen.

Den soeben angeführten Eindeutigkeitssatz kann man bekanntlich als eine wesentliche Grundlage der Klassenkörpertheorie auffassen. Auf ihn gestützt gibt nämlich die Klassenkörpertheorie einen vollständigen Überblick über alle abelschen Oberkörper A/k, indem sie sämtliche Primidealmengen des Grundkörpers k bestimmt, die als Regularitätsbereiche abelscher Oberkörper auftreten.

Der Eindeutigkeitssatz steht aber andererseits in enger Beziehung zu zwei weiteren bekannten Sätzen der algebraischen Zahlentheorie. Er folgt unmittelbar aus einem allgemeineren Satz von Bauer und diesen Bauerschen Satz wiederum gewinnt man unschwer aus einer Existenzaussage, die als Teilresultat in den Frobeniusschen Untersuchungen betreffend die Dichte von Primidealmengen enthalten ist. Um beide Sätze einfach formulieren zu können, verstehe ich unter N/k wieder einen Normalkörper endlichen Grades und unter K/k einen beliebigen algebraischen Oberkörper endlichen Grades. Ich denke mir ferner in üblicher Weise einen Regularitätsbereich stets nur bis auf endlich viele Primideale definiert, schreibe also $\mathfrak{R}(N) \geqq \mathfrak{R}(K)$, wenn alle Primideale aus $\mathfrak{R}(K)$ bis auf endlich viele in $\mathfrak{R}(N)$ enthalten sind. Bei Benutzung dieser Bezeichnungen kann man kurz sagen:

Bauerscher Satz. *Die Relationen*

$$\mathfrak{R}(N) \geqq \mathfrak{R}(K) \quad \textit{und} \quad N \leqq K$$

bedingen sich gegenseitig.

---

[1]) Zu den im Text angegebenen Sätzen aus der algebraischen Zahlentheorie vgl. H. Hasse, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der algebraischen Zahlentheorie, Teil II, Jahresb. d. Deutschen Math.-Ver. Erg. Bd. **6** (1930).

Frobeniusscher Existenzsatz. *Zu einer zyklischen Untergruppe $\mathfrak{G}'_3$ der Galoisgruppe $\mathfrak{G}$ von N/k existieren in N stets unendlich viele Primideale, deren Zerlegungsgruppe genau gleich $\mathfrak{G}'_3$ ist. Da umgekehrt die Zerlegungsgruppe eines in der Diskriminante nicht aufgehenden Primideals $\mathfrak{P}$ von N zyklisch ist, stimmt die Gesamtheit der Zerlegungsgruppen aller $\mathfrak{P}$ überein mit der Gesamtheit aller zyklischen Untergruppen von $\mathfrak{G}$.*

Im folgenden sollen nun die angegebenen drei Sätze, der Eindeutigkeitssatz, der Bauersche Satz und der Frobeniussche Existenzsatz, übertragen werden auf den Fall, daß der Grundkörper nicht ein algebraischer Zahlkörper, sondern ein algebraischer Funktionenkörper in einer Unbestimmten ist.

2. Ergebnisse. Sei also k ein algebraischer Funktionenkörper in einer Unbestimmten mit dem beliebigen Konstantenkörper Ω, d. h. k gehe aus Ω durch Adjunktion einer Unbestimmten z und nachfolgende endliche algebraische Erweiterung hervor [2]). Ich setze ferner voraus, k/Ω sei separabel [3]); es sei also möglich die Unbestimmte z in k so zu wählen, daß $\mathsf{k}/\Omega(z)$ separabel algebraisch ist. Man kann dann bekanntlich k aus $\Omega(z)$ durch Adjunktion einer separablen algebraischen Funktion $\varkappa$ erzeugen, d. h. man kann k über Ω aufbauen in der Form $\mathsf{k} = \Omega(z, \varkappa)$, wo z eine Unbestimmte über Ω und $\varkappa$ separabel algebraisch über $\Omega(z)$ ist. Über einem solchen Körper k als Grundkörper sollen im folgenden die Normalkörper N endlichen Grades, allgemeiner beliebige algebraische Oberkörper K von endlichem Grad untersucht werden, wobei jedoch stets nur separable algebraische Erweiterungen gemeint sind und alle vorkommenden Erweiterungen einem festen algebraisch abgeschlossenen Oberkörper von k entnommen sind.

Die Hilfsmittel für diese Untersuchung werden bekanntlich in der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen entwickelt [4]). Es wird dort gezeigt, daß die bei den algebraischen Zahlen auftretenden Primideale zu ersetzen sind durch die Primdivisoren des betrachteten algebraischen Funktionenkörpers, die definiert sind durch die ganzzahligen, allen Konstanten den Wert 0 erteilenden Bewertungen dieses Körpers. Der Regularitätsbereich $\mathfrak{R}(\mathsf{K})$ des algebraischen Oberkörpers K/k ist also zu erklären als die Menge aller Primdivisoren des Grundkörpers k, die sich in K in lauter verschiedene Primdivisoren und darunter mindestens einen vom Relativgrad 1 aufspalten. Der Regularitätsbereich $\mathfrak{R}(\mathsf{N})$ eines Normalkörpers N/k besteht demgemäß aus allen Primdivisoren von k, die in N in lauter verschiedene Primdivisoren des Relativgrads 1 zerfallen. Auch hier denke ich mir einen Regularitätsbereich stets nur bis auf endlich viele Primdivisoren definiert; ich schreibe also wieder $\mathfrak{R}(\mathsf{N}) \geqq \mathfrak{R}(\mathsf{K})$, wenn alle Primdivisoren aus $\mathfrak{R}(\mathsf{K})$ bis auf endlich viele in $\mathfrak{R}(\mathsf{N})$ enthalten sind.

Wie steht es nun bei Benutzung dieser Definitionen mit der Gültigkeit des Eindeutigkeitssatzes? Man erkennt leicht, daß er bei beliebigem Konstantenkörper Ω im allgemeinen nicht gilt. Um das einzusehen, braucht man Ω nur algebraisch abgeschlossen anzunehmen. Dann besteht nämlich der Regularitätsbereich $\mathfrak{R}(\mathsf{N})$ für jeden Normalkörper N/k aus allen Primdivisoren von k mit Ausnahme der endlich vielen, die in der Diskriminante von N/k aufgehen, und durch diese Menge $\mathfrak{R}(\mathsf{N})$ ist N/k offenbar nicht eindeutig bestimmt.

---

[2]) Hier ist im Gegensatz zu dem sonst in der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen üblichen Standpunkt keineswegs vorausgesetzt, daß Ω in k relativ algebraisch abgeschlossen ist. Es dürfen daher auch die später auftretenden algebraischen Oberkörper von k eine echte algebraische Erweiterung von Ω enthalten.

[3]) Eine allgemeine Theorie der separablen und nicht notwendig algebraischen Erweiterungen findet sich bei F. K. Schmidt, Über inseparable Körper (erscheint demnächst in diesem Journal).

[4]) Siehe F. K. Schmidt, Analytische Zahlentheorie in Körpern der Charakteristik p, Math. Zeitschr. **33** (1931).

Damit erhebt sich aber sogleich die Frage, ob sich nicht mit einfachen Hilfsmitteln wenigstens eine gewisse Klasse von Konstantenkörpern Ω abgrenzen läßt, so daß über jedem Grundkörper k mit einem solchen Konstantenkörper Ω doch wieder der Eindeutigkeitssatz besteht. Das ist nun in der Tat möglich, und zugleich ergibt sich, daß die arithmetisch besonders wichtigen Konstantenkörper gerade zu der betreffenden Klasse gehören. Ich werde nämlich zeigen:

A. *Ist Ω ein Körper, über dem der Hilbertsche Irreduzibilitätssatz gilt, und k ein algebraischer Funktionenkörper mit dem Konstantenkörper Ω, so ist jeder Normalkörper $\mathsf{N/k}$ durch seinen Regularitätsbereich $\mathfrak{R}(\mathsf{N})$ eindeutig bestimmt.*

Dabei sage ich über dem Körper Ω gelte der Hilbertsche Irreduzibilitätssatz [5]), wenn man in einem beliebigen irreduziblen Polynom $P(x; u_1, \ldots, u_n)$ in den Unbestimmten $x, u_1, \ldots, u_n$ mit Koeffizienten aus Ω stets die $u_1, \ldots, u_n$ auf unendlich viele Weisen durch Elemente $a_1, \ldots, a_n$ von Ω so ersetzen kann, daß das entstehende Polynom $P(x; a_1, \ldots, a_n)$ in x mit Koeffizienten aus Ω wiederum irreduzibel über Ω ist. Zu den Körpern, über denen der Hilbertsche Irreduzibilitätssatz gilt, gehören insbesondere der Körper der rationalen Zahlen und jeder algebraische Zahlkörper endlichen Grades, ferner jeder Körper Ω der seinerseits aus einem Unterkörper durch Adjunktion einer Unbestimmten und nachfolgende endliche algebraische Erweiterung entsteht. Über jedem algebraischen Funktionenkörper k mit einem solchen Konstantenkörper Ω besteht also nach A sicher der Eindeutigkeitssatz.

Für die algebraischen Funktionenkörper k, über deren Konstantenkörper der Hilbertsche Irreduzibilitätssatz gilt, lassen sich aber auch sogleich zwei weitere Sätze formulieren, die dem Bauerschen Satz und dem Frobeniusschen Existenzsatz entsprechen. Der erste dieser Sätze betrifft also einen Normalkörper $\mathsf{N/k}$ und einen beliebigen algebraischen Oberkörper $\mathsf{K/k}$ und besagt:

B. *Ist k ein algebraischer Funktionenkörper, über dessen Konstantenkörper der Hilbertsche Irreduzibilitätssatz gilt, so bedingen die Relationen*

$$\mathfrak{R}(\mathsf{N}) \geqq \mathfrak{R}(\mathsf{K}) \qquad \textit{und} \qquad \mathsf{N} \leqq \mathsf{K}$$

sich gegenseitig.

Der zweite handelt von den Primdivisoren eines Normalkörpers $\mathsf{N/k}$ und lautet:

C. *Ist k ein algebraischer Funktionenkörper, über dessen Konstantenkörper der Hilbertsche Irreduzibilitätssatz gilt, so gibt es in N zu einer beliebigen Untergruppe $\mathfrak{G}'$ der Galoisgruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathsf{N/k}$ stets unendlich viele Primdivisoren, deren Zerlegungsgruppe genau gleich $\mathfrak{G}'$ ist. Die Gesamtheit der Zerlegungsgruppen aller Primdivisoren von N stimmt also überein mit der Gesamtheit der Untergruppen von $\mathfrak{G}$.*

Die Voraussetzung, daß über dem Konstantenkörper Ω der Hilbertsche Irreduzibilitätssatz gelte, ist für die Richtigkeit der in Satz A und B ausgesprochenen Behauptungen nur hinreichend, nicht aber auch notwendig. Das erkennt man leicht am Beispiel derjenigen algebraischen Funktionenkörper, deren Konstantenkörper ein Galoisfeld ist. Über einem Galoisfeld gilt nämlich der Hilbertsche Irreduzibilitätssatz nicht, und trotzdem sind die Behauptungen der Sätze A und B auch über einem algebraischen Funktionenkörper mit einem Galoisfeld als Konstantenkörper richtig [6]). Die Frage nach

---

[5]) Zum Hilbertschen Irreduzibilitätssatz und für die darauf bezügliche Literatur vgl. W. Franz, Untersuchungen zum Hilbertschen Irreduzibilitätssatz, Math. Zeitschr. **33** (1931).

[6]) Vgl. F. K. Schmidt, Die Theorie der Klassenkörper über einen algebraischen Funktionenkörper mit endlichem Koeffizientenbereich, Sitz.-Ber. Erlangen **62** (1930).

notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit der Behauptungen in A und B bleibt also noch offen.

Die Beweise der Sätze A, B und C, die ich im folgenden gebe, sind im Gegensatz zur algebraischen Zahlentheorie durchaus elementar; ich verwende lediglich die Galoissche Theorie und die einfachsten algebraischen Eigenschaften eines algebraischen Funktionenkörpers. Dabei ist die Reihenfolge der Beweise dieselbe wie in der Zahlentheorie: ich leite zuerst den zuletzt aufgeführten Satz C her und aus ihm den Satz B, der ja A als unmittelbare Folge umfaßt. Da die Aussage des Satzes C sehr viel weiter geht als der Frobeniussche Existenzsatz in der Zahlentheorie, läßt sich aus ihr der Satz B ganz besonders einfach gewinnen.

3. Beweis von C. Um die folgenden Überlegungen nicht unterbrechen zu müssen, stelle ich zunächst einige häufig benutzte Bezeichnungen voran [7]).

Jedes Element α des algebraischen Funktionenkörpers K/k erzeugt bekanntlich in K einen Divisor, den zu α gehörigen Hauptdivisor

$$(\alpha) = \mathfrak{P}_1^{e_1}\,\mathfrak{P}_2^{e_2} \cdots \mathfrak{P}_s^{e_s} \qquad (e_i \gtrless 0),$$

wobei die $\mathfrak{P}_i$ verschiedene Primdivisoren von K bedeuten. Hieran anknüpfend sage ich: Der Primdivisor $\mathfrak{P}$ von K geht in α auf, wenn $\mathfrak{P}$ in (α) mit positivem Exponenten auftritt; α ist mod. $\mathfrak{P}$ endlich, wenn $\mathfrak{P}$ nicht in (α) mit negativem Exponenten vorkommt. Geht $\mathfrak{P}$ in $\alpha - \beta$ auf, so schreibe ich $\alpha \equiv \beta$ mod. $\mathfrak{P}$. Alle Elemente aus K, die zu einem festen Element α mod. $\mathfrak{P}$ kongruent sind, vereinige ich in üblicher Weise zu der durch α mod. $\mathfrak{P}$ bestimmten Restklasse $\tilde{\alpha}_{\mathfrak{P}}$. Ist K' ein Unterkörper von K, so bilden die Klassen $\tilde{\alpha}_{\mathfrak{P}}$, die durch die mod. $\mathfrak{P}$ endlichen Elemente α von K' erzeugt werden, einen Körper. Diesen Restklassenkörper bezeichne ich kurz mit $\tilde{K}'_{\mathfrak{P}}$.

Sei nun Ω ein Körper, über dem der Hilbertsche Irreduzibilitätssatz gilt, und $K = N$ speziell ein Normalkörper über k. Zum Beweis des Satzes C habe ich zu zeigen, daß in N unendlich viele Primdivisoren existieren, deren Zerlegungsgruppe mit einer vorgegebenen Untergruppe $\mathfrak{G}'$ der Galoisgruppe $\mathfrak{G}$ von N/k übereinstimmt, d. h. deren Zerlegungskörper gleich dem Zwischenkörper K' zwischen k und N ist, welcher zu $\mathfrak{G}'$ im Sinne der Galoisschen Theorie gehört. Diese letzte Aufgabe ist jedoch auf Grund einer bekannten Charakterisierung des Zerlegungskörpers gleichwertig mit der folgenden: Man gebe in N unendlich viele Primdivisoren $\mathfrak{P}$ an von der Art, daß jedes $\mathfrak{P}$ in K' einen Primdivisor vom Relativgrad 1 über k bestimmt und daß dieser Primdivisor von K' beim Übergang von K' zu N völlig unzerlegt bleibt. Die unendlich vielen Primdivisoren $\mathfrak{P}$, auf die es ankommt, haben also, in Formeln ausgedrückt, zwei Bedingungen zu erfüllen. Es muß für jedes solche $\mathfrak{P}$ gelten:

$$\alpha) \qquad (\tilde{K}'_{\mathfrak{P}} : \tilde{k}_{\mathfrak{P}}) = 1,$$

$$\beta) \qquad (\tilde{N}_{\mathfrak{P}} : \tilde{K}'_{\mathfrak{P}}) = (N : K').$$

Der Existenzbeweis für diese Primdivisoren $\mathfrak{P}$, den ich jetzt schrittweise entwickeln will, stützt sich wesentlich auf gewisse Gradrelationen für Restklassenkörper. Dabei betrachte ich wieder allgemein einen beliebigen algebraischen Oberkörper K/k und benutze als Haupthilfsmittel bei der Bestimmung der vorkommenden Gradzahlen eine Regel von Dedekind, die Dedekind selbst allerdings nur für die Primideale eines algebraischen Zahlkörpers ausgesprochen hat, die sich aber unmittelbar auf die Primdivisoren eines algebraischen Funktionenkörpers übertragen läßt. Diese Regel lautet [8]):

---

[7]) Zum folgenden vgl. loc. cit. [4]).

[8]) Dedekind, Über die Diskriminante endlicher algebraischer Zahlkörper, Göttinger Nachrichten 1882.

Dedekindsche Regel. *Ist* $\mathsf{K}' = \mathsf{k}(\vartheta)$ *ein Zwischenkörper zwischen* k *und* K *und* $\mathfrak{P}$ *ein Primdivisor von* K *von der Art, daß* ϑ *endlich* mod. $\mathfrak{P}$ *und die Diskriminante* $\Delta_{\mathsf{k}}(\vartheta) \not\equiv 0$ mod. $\mathfrak{P}$ *ist, so ist*

$$(\tilde{\mathsf{K}}'_{\mathfrak{P}} : \tilde{\mathsf{k}}_{\mathfrak{P}}) = (\tilde{\vartheta}_{\mathfrak{P}} : \tilde{\mathsf{k}}_{\mathfrak{P}}).$$

Mit Hilfe der Dedekindschen Regel leite ich zunächst ein grundlegendes Lemma her. An seiner Formulierung ist für die weiteren Schlüsse entscheidend, daß ich den Körper K nicht auf den bisherigen Grundkörper k, sondern statt dessen auf einen beliebigen in K enthaltenen, rein transzendenten Oberkörper $\Omega(\eta)$ des Konstantenkörpers Ω als Grundkörper beziehe.

Lemma. *Gilt über dem Konstantenkörper* Ω *der Hilbertsche Irreduzibilitätssatz und ist* $\mathsf{k}' = \Omega(\eta)$ *ein Unterkörper von* K, *über dem* K *separabel algebraisch ist, so existieren in* K *unendlich viele Primdivisoren* $\mathfrak{P}$ *von der Art daß*

a) η mod. $\mathfrak{P}$ *jeweils einem Element aus* Ω *kongruent ist,*

b) $(\tilde{\mathsf{K}}_{\mathfrak{P}} : \tilde{\mathsf{k}}'_{\mathfrak{P}}) = (\mathsf{K} : \mathsf{k}')$ *ist.*

Von den beiden Bedingungen a) und b) des Lemmas besagt offenbar die erste, daß η mod. $\mathfrak{P}$ endlich ist und daß $\mathfrak{P}$ in dem rein transzendenten Körper $\mathsf{k}' = \Omega(\eta)$ einen Primdivisor vom Grad 1 über Ω bestimmt. Die zweite drückt aus, daß dieser Primdivisor von k' beim Übergang von k' zu K völlig unzerlegt bleibt.

Zum Beweis des Lemmas betrachte ich ein definierendes Polynom $F(x; \eta)$ von $\mathsf{K}/\Omega(\eta)$,

$$F(x; \eta) = x^m + A_1(\eta)\, x^{m+1} + \cdots + A_m(\eta), \qquad A_i(\eta) \in \Omega[\eta].$$

$F(x; \eta)$ ist also in $\Omega[\eta, x]$ irreduzibel. Unter φ verstehe ich eine Nullstelle dieses Polynoms, die K über $\mathsf{k}' = \Omega(\eta)$ erzeugt;

$$F(\varphi; \eta) = 0, \qquad \mathsf{K} = \mathsf{k}'(\varphi).$$

Da über Ω der Hilbertsche Irreduzibilitätssatz gilt, gibt es unendlich viele Elemente a aus Ω, so daß das Polynom $F(x; a)$, welches aus $F(x; \eta)$ durch Ersetzung von η durch a entsteht, über Ω wiederum irreduzibel ist. Jedem solchen a ordne ich einen in $\eta - a$ aufgehenden Primdivisor von K zu und erhalte auf diese Weise unendlich viele Primdivisoren, von denen ich die endlich vielen ausschließe, die etwa in der Diskriminante $\Delta_{\mathsf{k}'}(\varphi)$ aufgehen oder für die φ nicht endlich ist[9]). Die unendlich vielen übrigbleibenden Primdivisoren $\mathfrak{P}$ erfüllen dann, wie ich zeigen werde, sämtlich die Bedingungen a) und b) des Lemmas.

Was die Bedingung a) angeht, so ist dies nach der Wahl der $\mathfrak{P}$ selbstverständlich, denn es ist $\eta \equiv a$ mod. $\mathfrak{P}$, wo a aus Ω stammt. Aber auch für die Bedingung b) ist es leicht einzusehen. Da nämlich φ mod. $\mathfrak{P}$ endlich und $\Delta_{\mathsf{k}'}(\varphi) \not\equiv 0$ mod. $\mathfrak{P}$ ist, besteht nach der Dedekindschen Regel die Gradgleichung

$$(\tilde{\mathsf{K}}_{\mathfrak{P}} : \tilde{\mathsf{k}}'_{\mathfrak{P}}) = (\tilde{\varphi}_{\mathfrak{P}} : \tilde{\mathsf{k}}'_{\mathfrak{P}}). \tag{1}$$

Um hier den Grad $(\tilde{\varphi}_{\mathfrak{P}} : \tilde{\mathsf{k}}'_{\mathfrak{P}})$ auszurechnen, beachte man, daß

$$0 = F(\varphi; \eta) \equiv F(\varphi; a) \text{ mod. } \mathfrak{P},$$

also φ mod. $\mathfrak{P}$ Nullstelle von $F(x; a)$ ist. Nach der Wahl von a ist $F(x; a)$ über Ω irreduzibel. Nun ist aber Ω zu $\tilde{\Omega}_{\mathfrak{P}}$ kongruentisomorph, und wegen $\tilde{\eta}_{\mathfrak{P}} = \tilde{a}_{\mathfrak{P}} \in \tilde{\Omega}_{\mathfrak{P}}$ ist

[9]) Es läßt sich leicht zeigen, daß keiner der ursprünglich gewählten Primdivisoren in $\Delta_{\mathsf{k}'}(\varphi)$ aufgeht und daß φ für alle diese Primdivisoren bereits endlich ist, so daß in Wahrheit überhaupt kein Primdivisor ausgeschlossen zu werden braucht.

$\tilde{\Omega}_{\mathfrak{P}}(\tilde{\eta}_{\mathfrak{P}}) = \tilde{\Omega}_{\mathfrak{P}}$, so daß das Polynom $F(x; a)$ bei Betrachtung mod. $\mathfrak{P}$ über $\tilde{\mathsf{k}}'_{\mathfrak{P}} = \tilde{\Omega}_{\mathfrak{P}}(\tilde{\eta}_{\mathfrak{P}})$ irreduzibel bleibt.

Es gilt mithin

$$(\tilde{\varphi}_{\mathfrak{P}} : \tilde{\mathsf{k}}'_{\mathfrak{P}}) = \mathrm{Grad}_x\, F(x; a) = \mathrm{Grad}_x\, F(x; \eta) = (\mathsf{K} : \mathsf{k}'),$$

und das bestätigt zusammen mit (1) tatsächlich die in b) geforderte Gleichung

$$(\tilde{\mathsf{K}}_{\mathfrak{P}} : \tilde{\mathsf{k}}'_{\mathfrak{P}}) = (\mathsf{K} : \mathsf{k}').$$

Aus dem soeben bewiesenen Lemma werde ich nun bereits einen Satz gewinnen, der nach dem zu Beginn dieser Nummer ausgeführten den Satz C umfaßt. Dieser Satz lautet:

D. *Gilt über* Ω *der Hilbertsche Irreduzibilitätssatz und ist* K' *ein beliebiger Zwischenkörper zwischen* k *und* K, *so existieren in* K *unendlich viele Primdivisoren* $\mathfrak{P}$ *von der Art, daß*

α) $(\tilde{\mathsf{K}}'_{\mathfrak{P}} : \tilde{\mathsf{k}}_{\mathfrak{P}}) = 1$ *ist,*

β) $(\tilde{\mathsf{K}}_{\mathfrak{P}} : \tilde{\mathsf{K}}'_{\mathfrak{P}}) = (\mathsf{K} : \mathsf{K}')$ *ist.*

Beim Beweis von D gehe ich davon aus, daß der Grundkörper $\mathsf{k} = \Omega(z, \varkappa)$ über $\Omega(z)$ separabel algebraisch und von endlichem Grad ist. Es ist daher auch der Zwischenkörper K' über $\Omega(z)$ separabel algebraisch und von endlichem Grad. η sei ein erzeugendes Element von $\mathsf{K}'/\Omega(z)$, das ein in $\Omega[z, x]$ irreduzibles Polynom von der Form

$$G(x; z) = x^n + B_1(z)\, x^{n-1} + \cdots + B_n(z), \qquad B_i(z) \in \Omega[z],$$

annulliert;

$$G(\eta; z) = 0,\ \mathsf{K}' = \Omega(z, \eta) \text{ und folglich auch } \mathsf{K}' = \mathsf{k}(\eta).$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann ich annehmen, daß $z/\Omega(\eta)$ separabel algebraisch ist. Sollte nämlich diese Voraussetzung für das ursprüngliche Element η noch nicht erfüllt sein, so beachte man, daß in dem bezüglich x separablen Polynom $G(x; z)$ sicher mindestens eine Potenz von x, etwa x^{n-i} wirklich vorkommt, deren Exponent durch die Charakteristik p [10]) von Ω unteilbar ist. Ich ersetze dann η durch das Element $\eta - z^r$, wo

$$r > \mathrm{Grad}_z\, G(x; z) \quad \text{und} \quad r(n-i) + \mathrm{Grad}_z\, B_i(z) \not\equiv 0 \bmod p$$

ist. Dieses Element $\eta - z^r$ erzeugt offenbar wieder K' aus $\Omega(z)$ und annulliert das Polynom

$$G^*(x; z) = G(x + z^r; z) = x^n + B_1^*(z)\, x^{n-1} + \cdots + B_n^*(z), \qquad B_i^*(z) \in \Omega[z],$$

das wiederum irreduzibel in $\Omega[z, x]$ ist. Das von x freie Glied $B_n^*(z) = G(z^r, z)$ des Polynoms $G^*(x; z)$ enthält aber gemäß der Wahl von r notwendig die durch p unteilbare Potenz $z^{r(n-i) + \mathrm{Grad}_z B_i(z)}$ von z, d. h. z ist wirklich separabel algebraisch in bezug auf $\Omega(\eta - z^r)$.

Der Grundgedanke der folgenden Überlegungen besteht darin, daß ich nunmehr den Gesamtkörper K auf den rein transzendenten Unterkörper $\mathsf{k}' = \Omega(\eta)$ als Grundkörper beziehe und dabei die zwischen den vier Körpern k', K', k und K bestehenden Relationen

$$\begin{aligned} \mathsf{k}' = \Omega(\eta) \subseteqq \mathsf{K}' &= \Omega(z, \eta) \\ &= \mathsf{k}(\eta) \quad \subseteqq \mathsf{K} \end{aligned}$$

benutze.

---

[10]) Hier ist für die Charakteristik selbstverständlich auch der Fall $p = 0$ zuzulassen. Im Falle der Charakteristik 0 zeigt die Überlegung des Textes, daß z bei passender Wahl von η algebraisch über $\Omega(\eta)$ ist, was sich nicht von selbst versteht, da K eine echte algebraische Erweiterung von Ω enthalten kann.

Nach meiner Annahme über η ist K' und damit auch K separabel algebraisch über $k' = \Omega(\eta)$. In K existieren daher, wie das Lemma aussagt, unendlich viele Primdivisoren $\mathfrak{P}$ von der Art, daß

a) $\eta \equiv a$ mod. $\mathfrak{P}$ mit $a \in \Omega$ ist,

b) $(\tilde{K}_{\mathfrak{P}} : \tilde{k}'_{\mathfrak{P}}) = (K : k')$ ist.

Von diesen Primdivisoren schließe ich die endlich vielen aus, die etwa in der Diskriminante $\Delta_k(\eta)$ aufgehen. Von den unendlich vielen übrig bleibenden Primdivisoren $\mathfrak{P}$ behaupte ich, daß sie die Bedingungen α) und β) von D erfüllen.

In der Tat, da η endlich mod. $\mathfrak{P}$ und $\Delta_k(\eta) \not\equiv 0$ mod. $\mathfrak{P}$ ist, besteht nach der Dedekindschen Regel für den aus $K' = k(\eta)$ hervorgehenden Restklassenkörper $\tilde{K}'_{\mathfrak{P}}$ die Gradgleichung

$$(\tilde{K}'_{\mathfrak{P}} : \tilde{k}_{\mathfrak{P}}) = (\tilde{\eta}_{\mathfrak{P}} : \tilde{k}_{\mathfrak{P}}).$$

Hieraus folgt aber wegen $\tilde{\eta}_{\mathfrak{P}} = \tilde{a}_{\mathfrak{P}} \in \tilde{\Omega}_{\mathfrak{P}} \leqq \tilde{k}_{\mathfrak{P}}$ sofort die in α) angegebene Gleichung

$$(\tilde{K}'_{\mathfrak{P}} : \tilde{k}_{\mathfrak{P}}) = 1.$$

Um auch die Richtigkeit der in β) geforderten Gleichung zu bestätigen, schreibe ich zunächst die trivialer Weise geltenden Ungleichungen

$$(\tilde{K}'_{\mathfrak{P}} : \tilde{k}'_{\mathfrak{P}}) \leqq (K' : k') \tag{2}$$

$$(\tilde{K}_{\mathfrak{P}} : \tilde{K}'_{\mathfrak{P}}) \leqq (K : K') \tag{3}$$

hin, aus denen durch Gradmultiplikation die Ungleichung

$$(\tilde{K}_{\mathfrak{P}} : \tilde{k}'_{\mathfrak{P}}) = (\tilde{K}_{\mathfrak{P}} : \tilde{K}'_{\mathfrak{P}})\,(\tilde{K}'_{\mathfrak{P}} : \tilde{k}'_{\mathfrak{P}}) \leqq (K : K')\,(K' : k') = (K : k') \tag{4}$$

folgt. Dabei steht in (4) offenbar nur dann das Gleichheitszeichen, wenn auch in (2) und (3) jeweils das Gleichheitszeichen steht.

Nun hat man aber andererseits nach b) die Gleichung

$$(\tilde{K}_{\mathfrak{P}} : \tilde{k}'_{\mathfrak{P}}) = (K : k').$$

In (4) gilt also wirklich das Gleichheitszeichen, folglich auch in (2) und (3), d. h. es ist

$$(\tilde{K}_{\mathfrak{P}} : \tilde{K}'_{\mathfrak{P}}) = (K : K'),$$

wie in β) verlangt war.

Damit ist Satz D vollständig bewiesen. Wendet man ihn speziell auf einem Normalkörper $K = N$ an, so erhält man nach den Feststellungen zu Beginn dieser Nummer unmittelbar den Satz C[11]).

4. Beweis von B. Über Ω gelte wieder der Hilbertsche Irreduzibilitätssatz. Es sei ferner N ein Normalkörper über k und K ein beliebiger algebraischer Oberkörper über k.

Daß die Beziehung $N \leqq K$ die Beziehung $\mathfrak{R}(N) \geqq \mathfrak{R}(K)$ nach sich zieht, ist trivial. Es braucht also nur bewiesen zu werden, daß umgekehrt aus $\mathfrak{R}(N) \geqq \mathfrak{R}(K)$ die Beziehung $N \leqq K$ folgt.

Zu diesem Zweck bilde ich den kleinsten Normalkörper N^*/k, der N und K enthält [12]). Nach Satz C gibt es in N^* sicher unendlich viele Primdivisoren $\mathfrak{P}^*$, deren Zer-

---

[11]) Umgekehrt kann D leicht aus C zurückgewonnen werden. Die Sätze C und D sind also gleichwertig.

[12]) Hier benutze ich die in Nr. 2 erwähnte Voraussetzung, daß alle vorkommenden algebraischen Erweiterungen von k einem festen algebraisch abgeschlossenen Oberkörper von k angehören.

legungskörper bezüglich $\mathfrak{k}$ gleich $\mathfrak{K}$ ist. Jeder dieser Primdivisoren $\mathfrak{P}^*$ bestimmt in $\mathfrak{K}$ einen Primdivisor vom Relativgrad 1 bezüglich $\mathfrak{k}$. Die unendlich vielen durch die $\mathfrak{P}^*$ in $\mathfrak{k}$ bestimmten Primdivisoren $\mathfrak{p}$, die selbstverständlich in $\mathfrak{K}$ fast alle[13]) in lauter verschiedene Primdivisoren zerfallen, spalten also in $\mathfrak{K}$ jeweils mindestens einen Primdivisor vom Relativgrad 1 bezüglich $\mathfrak{k}$ ab. Nach der Definition von $\Re(\mathfrak{K})$ gehören somit fast alle diese $\mathfrak{p}$ zu $\Re(\mathfrak{K})$ und aus $\Re(\mathfrak{N}) \geqq \Re(\mathfrak{K})$ folgt, daß sie auch fast alle zu $\Re(\mathfrak{N})$ gehören.

Es existiert daher mindestens ein Primdivisor $\mathfrak{P}^*$, dessen Zerlegungskörper bezüglich $\mathfrak{k}$ gleich $\mathfrak{K}$ ist und dessen zugehöriger Primdivisor $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{k}$ in $\Re(\mathfrak{N})$ liegt. $\mathfrak{p}$ zerfällt dann in $\mathfrak{N}$ in lauter Primdivisoren vom Relativgrad 1 bezüglich $\mathfrak{k}$, d. h. der durch $\mathfrak{P}^*$ in $\mathfrak{N}$ bestimmte Primdivisor besitzt notwendig den Relativgrad 1 bezüglich $\mathfrak{k}$. Infolge der bekannten Maximaleigenschaft des Zerlegungskörpers, wonach der Zerlegungskörper $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{P}^*$ jeden Unterkörper von $\mathfrak{N}^*$ enthält, in dem $\mathfrak{P}^*$ einen Primdivisor vom Relativgrad 1 bestimmt, ist daher wirklich $\mathfrak{N} \leqq \mathfrak{K}$.

[13]) d. h. alle mit nur endlich vielen Ausnahmen.

Eingegangen 12. Februar 1934.

Über Substitutionsgruppen im Galoisfeld $G(p^f)$.

Von *Otto Grün* in Berlin.

Es sei ein beliebiger algebraischer Zahlkörper $k(\alpha)$ gegeben und in ihm ein Primideal $\mathfrak{p}$ vom Grade f, also mit der Norm p^f. Wir betrachten die Gruppe aller linearen Substitutionen mod. $\mathfrak{p}$ vom Grade n in dem in k gelegenen $G(p^f)$. Sie möge mit $\mathfrak{G}_n$ bezeichnet werden, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Mit m_l werde für eine beliebige Primzahl l diejenige kleinste positive rationale ganze Zahl bezeichnet, für die $p^{fm_l} \equiv 1$ mod. l gilt. Bekanntlich ist die Ordnung von $\mathfrak{G}_n$ gleich $(p^{nf} - 1)\ (p^{nf} - p^f) \ldots (p^{nf} - p^{(n-1)f})$.

Sei also l eine rationale Primzahl, $(l, p) = 1$, und betrachten wir die Gruppe $\mathfrak{G}_{m_l}$, also die Gruppe aller Substitutionen mod. $\mathfrak{p}$ in k vom Grade m_l.

Satz 1. *Die l-Sylowgruppen in $\mathfrak{G}_{m_l}$ sind zyklisch von der Ordnung l^i, wenn $p^{fm_l} - 1 \equiv 0$ mod. l^i genau ist; $\mathfrak{G}_{m_l}$ enthält eine Untergruppe, die zyklisch von der Ordnung $p^{fm_l} - 1$ ist.*

Beweis: Es sei ε eine primitive l^i-te Einheitswurzel und K der aus k und ε erzeugte Körper. Es ergibt sich, daß $\mathfrak{p}$ in K in Primideale vom Relativgrade m_l zerfällt. $\mathfrak{p}_1$ sei ein solches in $\mathfrak{p}$ aufgehendes Primideal. Jede Matrix aus einer l-Sylowgruppe $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{G}_{m_l}$ kann man in K mod $\mathfrak{p}_1$ auf Diagonalform bringen. Dabei kann nie die charakteristische Wurzel 1 auftreten, denn sonst könnte man die Matrix bereits in k auf die Form

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M_1 \end{pmatrix}$$

bringen. M_1 müßte dabei auch die Ordnung l^i haben, wenn M sie hat; das ist aber unmöglich, weil M_1 in der Gruppe $\mathfrak{G}_{m_l-1}$ liegt, deren Ordnung prim zu l ist. Nun enthält $\mathfrak{L}$ jedenfalls ein von E verschiedenes Zentrum $\mathfrak{Z}$. Dasselbe sei in K auf Diagonalform gebracht, und es sei M eine Matrix von der Ordnung l^r aus $\mathfrak{Z}$. Ist ε_1 eine Wurzel von M, so sind die anderen Wurzeln $\varepsilon_1^{p^f}, \varepsilon_1^{p^{2f}}, \ldots, \varepsilon_1^{p^{f(m_l-1)}}$. Diese sind sämtlich verschieden; da M aus dem Zentrum stammt, muß also die Gruppe $\mathfrak{L}$ abelsch sein. Wir dürfen demnach voraussetzen, daß wir die ganze l-Sylowgruppe $\mathfrak{L}$ gleichzeitig auf Diagonalform bringen können. Sind M_1, M_2 zwei Matrizen aus $\mathfrak{L}$ mit den Wurzelsystemen $(\varepsilon_1^{k_1}, \ldots)$ bzw. $(\varepsilon_1^{k_2}, \ldots)$, so hat $M_1^{k_2} M_2^{-k_1}$ eine Wurzel $= 1$, also müssen nach obigem alle Wurzeln $= 1$ sein; dies gilt für beliebige Matrizen aus $\mathfrak{L}$, also muß die Gruppe $\mathfrak{L}$ zyklisch sein.

Nun sei M eine erzeugende Matrix aus $\mathfrak{L}$, und sie werde durch Transformation mit T auf Diagonalform gebracht,

$$T^{-1} M T = M_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon & & & \\ & \varepsilon^{p^f} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varepsilon^{p^{f(m_l-1)}} \end{pmatrix}.$$

Jeden beliebigen Rest ϱ mod. $\mathfrak{p}_1$ in K kann man offenbar auf die Form bringen

$$\varrho \equiv \beta_1 \varepsilon + \beta_2 \varepsilon^{p^f} + \cdots + \beta_{m_l-1} \varepsilon^{p^{f(m_l-1)}} \text{ mod. } \mathfrak{p}_1 \qquad (\beta_1, \beta_2, \ldots \text{ in } k).$$

In der Matrix $M_2 = \sum_{r=1}^{m_l} \beta_r M_1^{p^{f(r-1)}}$ sind dann $\varrho, \varrho^{p^f}, \ldots, \varrho^{p^{f(m_l-1)}}$ die charakteristischen Wurzeln. Wählt man speziell ϱ als Primitivzahl nach $\mathfrak{p}_1$, so folgt, daß M_2 die Ordnung $p^{fm_l} - 1$ mod $\mathfrak{p}_1$ hat. Andererseits wird offenbar M_2 durch Transformation mit T^{-1} nach k verlegt. Also enthält $\mathfrak{G}_{m_l}$ eine zyklische Untergruppe von der Ordnung $p^{fm_l} - 1$, deren Untergruppe wieder $\mathfrak{L}$ ist, w. z. b. w.

Nunmehr möge eine Gruppe vom Grade rm_l zugrunde gelegt werden, zunächst $r < l$. Die Ordnung ihrer l-Sylowgruppen ist dann l^{ri}, wobei $p^{fm_l} - 1 \equiv 0 \bmod l^i$ ist. Unter M werde eine Matrix von der Ordnung l^i aus der Gruppe $\mathfrak{G}_{m_l}$, unter E ihre Einheit verstanden. Folgende Matrizen bilden dann eine abelsche Untergruppe von der Ordnung l^{ri} von $\mathfrak{G}_{rm_l}$:

$$M_1 = \begin{pmatrix} M & & & & \\ & E & & & \\ & & E & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & E \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} E & & & & \\ & M & & & \\ & & E & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & E \end{pmatrix}, \ldots, \quad M_r = \begin{pmatrix} E & & & & \\ & E & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & E & \\ & & & & M \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich, daß die l-Sylowgruppen von $\mathfrak{G}_{rm_l}$ abelsch vom Typ $(i, i, \ldots, i)$ und von der Ordnung l^{ri} sind, wenn $p^{fm_l} - 1 \equiv 0 \bmod l^i$ genau ist. Ist ferner der Grad der Gruppe gleich $rm_l + h$, $h < m_l$, $r < l$, so sei E die Einheit der Gruppe $\mathfrak{G}_h$ vom Grade h. Indem man beachtet, daß die Matrizen

$$M_1' = \begin{pmatrix} M_1 & \\ & E \end{pmatrix}, \quad M_2' = \begin{pmatrix} M_2 & \\ & E \end{pmatrix}, \ldots, \quad M_r' = \begin{pmatrix} M_r & \\ & E \end{pmatrix}$$

(wobei $M_1, M_2, \ldots, M_r$ wieder die obigen Matrizen aus $\mathfrak{G}_{rm_l}$ sind) wieder eine abelsche Untergruppe von der Ordnung l^{ri} von $\mathfrak{G}_{rm_l+h}$ bilden und daß andererseits die Ordnung der l-Sylowgruppen von $\mathfrak{G}_{rm_l+h}$ ebenfalls $= l^{ir}$ ist, kann man folgenden Satz aussprechen:

Satz 2. *Es sei n der Grad einer Substitutionsgruppe im $G(p^f)$. Ist dann $\left[\frac{n}{m_l}\right] = r < l$, so sind die l-Sylowgruppen von $\mathfrak{G}_n$ abelsch vom Typ $(i, i, \ldots, i)$ und von der Ordnung l^{ri}, wenn $p^{fm_l} - 1 \equiv 0$ mod l^i genau ist.*

Wir gehen nunmehr zu der Gruppe $\mathfrak{G}_{lm_l}$ vom Grade lm_l über. M sei wieder eine Matrix von der Ordnung l^i aus $\mathfrak{G}_{m_l}$ und E ihre Einheit. Unter P sei die Matrix verstanden, die entsteht, wenn man eine Permutation von der Ordnung l von l Elementen als Matrix schreibt und dabei die Einsen durch E ersetzt. Also etwa

$$P = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & E & 0 & \cdots \\ & & E & & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & E \\ E & 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ferner sei} \quad M_1 = \begin{pmatrix} M & & & \\ & E & & \\ & & \cdot & \\ & & & E \end{pmatrix}.$$

Aus M_1 und P entsteht eine 2-stufig metabelsche Untergruppe von der Ordnung l^{il+1} von $\mathfrak{G}_{lm_l}$. Da dies auch die Ordnung der l-Sylowgruppen von $\mathfrak{G}_{lm_l}$ ist, haben

wir also eine l-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}_{lm_l}$ konstruiert. Sie enthält offenbar einen abelschen Normalteiler von der Ordnung l^{il}, mit zyklischer Faktorgruppe von der Ordnung l; er entsteht aus den Matrizen $P^{-r} M_1 P^r$, $r = 0, 1, \ldots, l-1$. Das Zentrum ist

$$= M_1 \cdot P^{-1} M_1 P \cdot P^{-2} M_1 P^2 \cdots P M_1 P^{-1}.$$

Um die l-Sylowgruppen $\mathfrak{L}$ einer Gruppe vom Grade $l^k m_l$ zu untersuchen, nehmen wir an, daß uns sämtliche Matrizen M einer l-Sylowgruppe $\mathfrak{L}_1$ aus der Gruppe vom Grade $l^{k-1} m_l$ bekannt seien. Unter P sei eine mit E_1, der Einheit aus $\mathfrak{G}_{l^{k-1} m_l}$, analog der oben gegebenen Vorschrift gebildete Matrix von der Ordnung l, deren Grad dann also $l^k m_l$ ist, verstanden. Es zeigt sich sofort, daß aus P und allen Matrizen

$$M_r' = \begin{pmatrix} M_r & & & & \\ & E_1 & & & \\ & & E_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & E_1 \end{pmatrix} \quad (r = 1, 2, \ldots;\ \text{d. h. } M_r \text{ durchläuft alle Matrizen aus } \mathfrak{L}_1)$$

eine l-Sylowgruppe $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{G}_{l^k m_l}$ entsteht. Ist $\mathfrak{L}_1$ genau k-stufig metabelsch, so ist offenbar $\mathfrak{L}$ genau $(k+1)$-stufig metabelsch. Auf diese Weise folgt:

Satz 3. *Die l-Sylowgruppen in der Substitutionsgruppe vom Grade $l^k m_l$ sind genau $(k+1)$-stufig metabelsch, da die l-Sylowgruppen vom Grade m_l abelsch (zyklisch) sind.*

Nunmehr soll der allgemeinste Fall, nämlich die l-Sylowgruppen $\mathfrak{L}$ der Substitutionsgruppe vom Grade n, wo $n = k + (k_0 + k_1 l + k_2 l^2 + \cdots + k_r l^r) m_l$; $k < m_l$; $k_0, k_1, \ldots, k_r < l$, betrachtet werden. Bilden wir alle möglichen Matrizen folgender Art: Wir setzen in Diagonalform hinter einander 1-mal die Einheit aus der Gruppe $\mathfrak{G}_k$, k_0-mal beliebige, gleiche oder verschiedene Elemente aus einer l-Sylowgruppe der Gruppe vom Grade m_l, k_1-mal beliebige gleiche oder verschiedene Elemente einer l-Sylowgruppe vom Grade $m_l, \ldots, k_r$-mal beliebige gleiche oder verschiedene Elemente aus einer l-Sylowgruppe vom Grade $m_l l^r$. Die aus allen diesen Matrizen entstehende Gruppe ist isomorph mit einem direkten Produkt, das aus k_0 miteinander isomorphen Gruppen $\mathfrak{L}_0$, k_1 miteinander isomorphen Gruppen $\mathfrak{L}_1, \ldots, k_r$ miteinander isomorphen Gruppen $\mathfrak{L}_r$ entsteht, wobei allgemein $\mathfrak{L}_s$ isomorph mit einer l-Sylowgruppe vom Grade $l^s m_l$ ist. So kann man die aus obigen Matrizen bestehende Gruppe vollständig auf die einfacheren Gruppen vom Grade $m_l, l m_l, l^2 m_l, \ldots$ zurückführen, ihre Struktur ist also genau bekannt. Andererseits verifiziert man leicht durch Vergleichung der Ordnung, daß die so gebildete l-Gruppe eine l-Sylowgruppe vom Grade $n = k + (k_0 + k_1 l + \cdots + k_r l^r) m_l$ ist. Demnach gilt:

Satz 4. *Die l-Sylowgruppen einer Substitutionsgruppe vom Grade n sind genau $(r+1)$-stufig metabelsch, wenn $l^r \leqq \left[\frac{n}{m_l}\right] < l^{r+1}$ ist.*

Ferner folgt aus obigen Entwicklungen die allgemeine Tatsache:

Für $n \neq m_l$ erscheint eine l-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}_n$ in imprimitiver Form; dabei hat ihr abelscher Normalteiler intransitive Form. Ist weiter n nicht gleich einer Zahl $n = l^k m_l$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, so hat eine l-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}_n$ intransitive Form.

Eingegangen 20. März 1934.

Erzeugnisse einer Klasse Cremonascher Verwandtschaften n. Grades zwischen Grundgebilden zweiter Stufe.

Von *Anton Plamitzer* in Lwów (Polen).

Die vorliegende Abhandlung zerfällt in drei Teile. Im ersten Teile stelle ich eine allgemeine Cremonasche Verwandtschaft (birationale Transformation) n. Grades

(1) $$(\omega_0)\,\pi^n(\omega_1)$$

zwischen zwei gegebenen ebenen Punktfeldern (ω_0) und (ω_1) und allgemeine Kollineationen

(2) $$(\omega_1)\,\varkappa(\omega_2)\,\varkappa(\omega_3)\,\varkappa \ldots \varkappa(\omega_m)$$

zwischen m gegebenen ebenen Feldern (ω_ι), $\iota = 1, 2, \ldots, m$, her. Zwischen dem Punktfelde (ω_0) und jedem von den $m-1$ übrigen Punktfeldern ergibt sich unmittelbar aus den Relationen (1) und (2) folgende Klasse allgemeiner Cremonascher Verwandtschaften n. Grades:

(3) $$(\omega_0)\,\pi^n(\omega_2),\ (\omega_0)\,\pi^n(\omega_3), \ldots, (\omega_0)\,\pi^n(\omega_m).$$

Gleichzeitig bespreche ich im ersten Teile analoge Beziehungen zwischen anderen gleichartigen Grundgebilden zweiter Stufe, nämlich zwischen ebenen Strahlenfeldern, zentrischen Ebenenbündeln und Strahlenbündeln.

Im zweiten Teile untersuche ich die Eigenschaften von drei und vier solchen Grundgebilden zweiter Stufe. Sind z. B. drei solche kollokale Punktfelder gegeben, welche den Relationen (1), (2) und (3) genügen, so gehen durch irgendeinen festen Punkt — der in der gemeinsamen Trägerebene dieser drei Felder liegt — $2n+1$ solche Geraden, daß jede von ihnen je drei entsprechende Punkte dieser Felder verbindet. Die Verbindungsgeraden sämtlicher Tripel homologer Punkte $A_0A_1A_2, \ldots$ der betrachteten kollokalen Felder erzeugen eine Plankurve $(2n+1)$. Klasse und $(2n-1)$. Geschlechts. Bezeichnet man mit $a = A_0A_1A_2, \ldots$ die sämtlichen Tangenten dieser Plankurve, so erzeugen: a) die Punkte $A_0, \ldots$ des Feldes (ω_0) eine Plankurve $(2n+1)$. Ordnung und $(2n-1)$. Geschlechts; b) die Punkte $A_\iota, \ldots$ des Feldes (ω_ι), $\iota = 1, 2$, eine Plankurve $(n+2)$. Ordnung und $(2n-1)$. Geschlechts. — Sind vier solche kollokale Punktfelder gegeben, die den Relationen (1), (2) und (3) genügen, so liegen $3(n+1)$-mal vier homologe Punkte dieser Felder in je einer geraden Linie.

In diesem zweiten Teile meiner Abhandlung bespreche ich gleichzeitig analoge Eigenschaften von drei bzw. vier kollokalen Strahlenfeldern, konzentrischen Ebenenbündeln und Strahlenbündeln, welche den Relationen (1), (2) und (3) genügen. Als Erzeugnisse dieser Grundgebilde zweiter Stufe ergeben sich Plankurven und Kegelflächen $(2n+1)$. Klasse (bzw. Ordnung) und $(2n-1)$. Geschlechts.

Im dritten und letzten Teile meiner Abhandlung untersuche ich die Eigenschaften von drei, vier und fünf solchen Ebenenbündeln bzw. Punktfeldern, welche den Relationen (1), (2) und (3) genügen. Als Erzeugnisse dieser Grundgebilde zweiter Stufe ergeben sich Flächen $(2n+1)$. Ordnung mit einer n-fachen kubischen Raumkurve, Flächen $(2n+1)$. Klasse, deren n-fache Tangentialebenen einen kubischen Torsus bilden, Raumkurven $3(n+1)$. Ordnung und $3n$. Geschlechts, endlich Torsen $3(n+1)$. Klasse und $3n$. Geschlechts.

In einem besonderen Falle für $n=2$ erhalten wir [1]) eine Klasse quadratischer Verwandtschaften zwischen Grundgebilden zweiter Stufe und analoge Erzeugnisse dieser Grundgebilde.

I.

1. *Die Konstruktion einer Klasse Cremonascher Verwandtschaften n. Grades zwischen ebenen Punktfeldern.* Es liegen zwei ebene Punktfelder (ω_0) und (ω_1) vor, deren Punkte $A_0, B_0, \ldots$ und $A_1, B_1, \ldots$ sich in einer *allgemeinen* (birationalen Transformation) *Cremonaschen Verwandtschaft n.* Grades befinden:

$$(1) \qquad (\omega_0)\,\pi^n(\omega_1).$$

Die Fundamentalpunkte (Hauptpunkte) in dem Punktfelde (ω_0), deren Anzahl ϱ sei, mögen mit

$$F_1^0, F_2^0, \ldots, F_i^0, \ldots, F_\varrho^0$$

und ihre Vielfachheiten mit

$$r_1, r_2, \ldots, r_i, \ldots, r_\varrho$$

bezeichnet werden. Diesen Hauptpunkten entsprechen in (ω_1) die unikursalen (von dem Geschlecht 0) Fundamental-(Haupt-)-kurven

$$f_1^1, f_2^1, \ldots, f_i^1, \ldots, f_\varrho^1$$

von den Ordnungen

$$r_1, r_2, \ldots, r_i, \ldots, r_\varrho.$$

Die Hauptpunkte in (ω_1), deren Zahl σ sei (bekanntlich $\sigma=\varrho$), seien

$$F_1^1, F_2^1, \ldots, F_k^1, \ldots, F_\sigma^1,$$

ihre Multiplizitäten und die Ordnungen der in (ω_0) entsprechender unikursalen Fundamentalkurven

$$f_1^0, f_2^0, \ldots, f_k^0, \ldots, f_\sigma^0,$$

seien

$$s_1, s_2, \ldots, s_k, \ldots, s_\sigma.$$

Bekanntlich gelten folgende [2]) Beziehungen:

$$(I) \qquad \Sigma r_i^2 = \Sigma s_k^2 = n^2 - 1$$

$$(II) \qquad \Sigma \tfrac{1}{2} r_i(r_i-1) = \Sigma \tfrac{1}{2} s_k(s_k-1) = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

$$(III) \qquad \Sigma r_i = \Sigma s_k = 3(n-1)$$

$$(IV) \qquad \Sigma r_i \mu_{ik}^0 = n s_k.$$

---

[1]) Antoni Plamitzer, Utwory pewnej klasy przekształceń kwadratowych pomiędzy układami płaskiemi, wzgl. wiązkami. Prace Matematyczno-Fizyczne T. XXXV. Warszawa 1927—1928.

[2]) Rudolf Sturm, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften. Bd. IV. Nr. 785, 790, 792. Leipzig u. Berlin 1909.

Bedeutet μ_{ik}^0 die Multiplizität des Fundamentalpunktes F_i^0 auf der Fundamentalkurve f_k^0 und μ_{ki}^1 die Vielfachheit von F_k^1 auf f_i^1, so ist

$$\mu_{ik}^0 = \mu_{ki}^1.$$

Wenn ein Punkt des Feldes, z. B. (ω_0), eine Kurve von der Ordnung ν beschreibt, die durch den r_i-fachen Fundamentalpunkt F_i^0 l_i-mal hindurchgeht, so beschreibt der entsprechende Punkt in dem Felde (ω_1) eine Kurve von der Ordnung

$$\nu n - \Sigma l_i r_i,$$

die in dem s_k-fachen Fundamentalpunkt F_k^1 die Multiplizität

$$\nu s_k - \Sigma l_i \mu_{ik}^0$$

besitzt.

Liegen die Punktfelder $(\omega_0)\pi^n(\omega_1)$ *ineinander*, so haben sie $n+2$ Koinzidenzpunkte.

Anmerkung: Insbesondere kann jedes Punktfeld (ω_0), (ω_1) einen $(n-1)$-*fachen* Hauptpunkt und $2(n-1)$ *einfache* Fundamentalpunkte besitzen. Die Hauptkurven in jedem der beiden Felder bestehen dann aus Geraden, welche den $(n-1)$-fachen Hauptpunkt mit den einfachen verbinden, und einer Kurve $(n-1)$. Ordnung, welche in dem ersten Hauptpunkt die Multiplizität $n-2$ besitzt und durch die übrigen einfach hindurchgeht. Diese Transformation heißt Jonquièressche Verwandtschaft n-ten Grades.

Zwischen m gegebenen ebenen Feldern (ω_ι), $\iota = 1, 2, \ldots, m$, stellen wir *allgemeine Kollineationen* her:

$$(2) \qquad (\omega_1)\,\varkappa(\omega_2)\,\varkappa(\omega_3)\,\varkappa \ldots \varkappa(\omega_m).$$

Entsprechende Punkte, bzw. Geraden dieser Felder mögen mit $A_1, A_2, \ldots, A_m$ und $b_1, b_2, \ldots, b_m$ bezeichnet werden. Jedem Fundamentalpunkte F_k^1 und jeder Fundamentalkurve f_i^1 des Feldes (ω_1) entspricht in (ω_ι) ein Hauptpunkt F_k^ι bzw. eine Hauptkurve f_i^ι.

Zwischen dem Punktfelde (ω_0) und jedem von den $m-1$ übrigen Punktfeldern (ω_ε), $\varepsilon = 2, 3, \ldots, m$, ergibt sich unmittelbar aus den Relationen (1) und (2) folgende Klasse *allgemeiner Cremonascher Verwandtschaften* n. Grades:

$$(3) \qquad (\omega_0)\,\pi^n(\omega_2),\ (\omega_0)\,\pi^n(\omega_3),\ \ldots,\ (\omega_0)\,\pi^n(\omega_m).$$

Jedem r_i-fachen Hauptpunkte F_i^0 des Punktfeldes (ω_0) entspricht im Punktfelde (ω_ε) eine unikursale Fundamentalkurve r_i-ter Ordnung f_i^ε. Jedem s_k-fachen Fundamentalpunkte F_k^ε des Punktfeldes (ω_ε) entspricht im Punktfelde (ω_0) eine unikursale Hauptkurve s_k-ter Ordnung f_k^0.

2. *Die Konstruktion einer Klasse Cremonascher Verwandtschaften n. Grades zwischen Ebenenbündeln* (Strahlenbündeln bzw. Strahlenfeldern). Es liegen zwei zentrische Ebenenbündel (W_0) und (W_1) vor, deren Ebenen $\alpha_0, \beta_0, \ldots$ und $\alpha_1, \beta_1, \ldots$ sich in einer *allgemeiner Cremonaschen Verwandtschaft* n. Grades befinden:

$$(1a) \qquad (W_0)\,\pi^n(W_1).$$

Jeder r_i-fachen Fundamentalebene φ_i^0, $i = 1, 2, \ldots, \varrho$, des Ebenenbündels (W_0) entspricht im (W_1) ein unikursaler Fundamentalkegel Φ_i^1 von der Klasse r_i. Jeder s_k-fachen Hauptebene φ_k^1, $k = 1, 2, \ldots, \sigma$, des Ebenenbündels (W_1) entspricht in dem Ebenenbündel (W_0) ein unikursaler Hauptkegel Φ_k^0 von der Klasse s_k. Bekanntlich gelten die in Nr. 1 angegebenen Beziehungen (I), (II), (III) und (IV).

Zwischen m gegebenen zentrischen Bündeln (W_ι), $\iota = 1, 2, \ldots, m$, stellen wir *allgemeine Kollineationen* her:

(2a) $$(W_1)\ \varkappa(W_2)\ \varkappa(W_3)\ \varkappa \ldots \varkappa(W_m),$$

und bezeichnen mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m$ entsprechende (homologe) Ebenen, und mit $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m$ homologe Geraden dieser Bündel. Jeder Hauptebene φ_k^1 und jedem Hauptkegel Φ_i^1 des Bündels (W_1) entspricht in (W_ι) eine Hauptebene φ_k^ι bzw. ein Hauptkegel Φ_i^ι.

Zwischen dem Ebenenbündel (W_0) und jedem von den $m-1$ übrigen Ebenenbündeln (W_ε), $\varepsilon = 2, 3, \ldots, m$, ergibt sich unmittelbar aus den Relationen (1a) und (2a) folgende Klasse *allgemeiner Cremonascher Verwandtschaften n.* Grades:

(3a) $$(W_0)\ \pi^n(W_2),\ (W_0)\ \pi^n(W_3), \ldots, (W_0)\ \pi^n(W_m).$$

Jeder r_i-fachen Hauptebene φ_i^0 des Bündels (W_0) entspricht im (W_ε) ein unikursaler Hauptkegel Φ_i^ε von der Klasse r_i. Jeder s_k-fachen Fundamentalebene φ_k^ε des Bündels (W_ε) entspricht in dem Ebenenbündel (W_0) ein unikursaler Hauptkegel Φ_k^0 von der Klasse s_k.

Die betrachteten Ebenenbündel (W_0) und (W_ι), $\iota = 1, 2, \ldots, m$, schneiden wir bzw. mit den Ebenen ω_0, ω_ι. Aus den Relationen (2a), (1a) und (3a) ergeben sich unmittelbar *allgemeine Kollineationen*

(2b) $$(\omega_1)\ \varkappa(\omega_2)\ \varkappa(\omega_3)\ \varkappa \ldots \varkappa(\omega_m)$$

zwischen den ebenen Feldern (ω_ι) und *allgemeine Cremonasche Verwandtschaften n.* Grades

(1b) $$(\omega_0)\ \pi^n(\omega_1)$$

(3b) $$(\omega_0)\ \pi^n(\omega_2),\ (\omega_0)\ \pi^n(\omega_3), \ldots, (\omega_0)\ \pi^n(\omega_m)$$

zwischen den ebenen Strahlenfeldern (ω_0), (ω_ι). Die Geraden $a_0 = \alpha_0\,\omega_0$, $a_1 = \alpha_1\,\omega_1$, $a_2 = \alpha_2\,\omega_2, \ldots, a_m = \alpha_m\,\omega_m$ sind homologe Strahlen dieser Felder. Jeder r_i-fachen Fundamentalgeraden $f_i^0 = \varphi_i^0\,\omega_0$ des Strahlenfeldes (ω_0) entspricht in dem ebenen Strahlenfelde (ω_ι) eine unikursale Fundamentalkurve f_i^ι von der Klasse r_i (d. h. die Schnittkurve des Hauptkegels Φ_i^ι mit der Ebene ω_ι). Jeder s_k-fachen Hauptgeraden $f_k^\iota = \varphi_k^\iota\,\omega_\iota$ des Feldes (ω_ι) entspricht in (ω_0) eine unikursale Hauptkurve f_k^0 von der Klasse s_k (d. h. die Schnittkurve des Fundamentalkegels Φ_k^0 mit der Ebene ω_0).

Die in Nr. 1 betrachteten Punktfelder (ω_0) und (ω_ι), $\iota = 1, 2, \ldots, m$, projizieren wir bzw. von den Punkten W_0, W_ι. Aus den Relationen (2), (1) und (3) ergeben sich unmittelbar *allgemeine Kollineationen*

(2c) $$(W_1)\ \varkappa(W_2)\ \varkappa(W_3)\ \varkappa \ldots \varkappa(W_m)$$

zwischen den zentrischen Bündeln (W_ι) und *allgemeine Cremonasche Verwandtschaften n.* Grades

(1c) $$(W_0)\ \pi^n(W_1)$$

(3c) $$(W_0)\ \pi^n(W_2),\ (W_0)\ \pi^n(W_3), \ldots, (W_0)\ \pi^n(W_m)$$

zwischen den zentrischen Strahlenbündeln (W_0), (W_ι). Die Geraden $a_0 = A_0\,W_0$, $a_1 = A_1\,W_1$, $a_2 = A_2\,W_2, \ldots, a_m = A_m\,W_m$ bilden homologe Strahlen dieser Bündel. Jeder r_i-fachen Hauptgeraden $f_i^0 = F_i^0 W_0$ des Strahlenbündels (W_0) entspricht im (W_ι) ein unikursaler Fundamentalkegel Φ_i^ι von der Ordnung r_i. Jeder s_k-fachen Hauptgeraden $f_k^\iota = F_k^\iota W_\iota$ des Bündels (W_ι) entspricht in dem Bündel (W_0) ein unikursaler Fundamentalkegel s_k-ten Ordnung Φ_k^0.

II.

3. *Eigenschaften dreier kollokaler Punktfelder.* Zwischen drei gegebenen Punktfeldern (ω_0), (ω_1) und (ω_2), die eine gemeinsame Trägerebene ω besitzen, stellen wir folgende Beziehungen her:

$$(4) \qquad (\omega_1)\,\varkappa(\omega_2), \quad (\omega_0)\,\pi^n(\omega_1), \quad (\omega_0)\,\pi^n(\omega_2),$$

welche den Relationen (1), (2) und (3) in Nr. 1 entsprechen. Man kann fragen, wie oft drei homologe Punkte A_0, A_1 und A_2 dieser kollokaler Felder mit irgendeinem festen Punkte P der Trägerebene ω in je einer Geraden liegen.

Im Strahlenbüschel $(P)_\omega$, der P zum Scheitel hat und in der Ebene ω liegt, stellen wir eine Hilfskorrespondenz her. Einer Punktreihe $s_0(A_0, B_0, \ldots)$, deren Träger eine beliebige Gerade s_0 des Büschels $(P)_\omega$ ist, entsprechen bekanntlich — vgl. die Relation (4) — in (ω_1) und (ω_2) zwei projektive Punktreihen

$$S_1^n(A_1, B_1, \ldots) \,\overline{\wedge}\, S_2^n(A_2, B_2, \ldots),$$

deren Träger unikursale Plankurven n. Ordnung S_1^n und S_2^n sind. Diese Punktreihen $(S_1^n)\,\overline{\wedge}\,(S_2^n)$ erzeugen [1]) eine Kurve S von der Klasse $2n$. Der Geraden s_0 ordnen wir die $2n$ aus P an die Kurve S gelegten Tangenten $s', \ldots$ zu. Jede Tangente $s' = B_1B_2$ verbindet nur zwei homologe Punkte B_1 und B_2 der kollinearen Felder (ω_1), (ω_2), denn sie ist von drei Koinzidenzgeraden dieser Felder verschieden. Den Elementen B_1 und B_2 entspricht in (ω_0) der einzige Punkt B_0. Der Geraden $s' = B_1B_2$ des Büschels $(P)_\omega$ ordnen wir die Gerade $s_0 = PB_0$ zu. Auf diese Weise gelangen wir zu einer Strahlenkorrespondenz $[1, 2n]$ im Büschel $(P)_\omega$, und jede von den $(2n+1)$ Koinzidenzgeraden dieser Korrespondenz verbindet je drei homologe Punkte der gegebenen Felder (ω_0), (ω_1), (ω_2).

Betrachten wir den r_i-fachen Fundamentalpunkt F_i^0 als Scheitel P des Strahlenbüschels $(P)_\omega$, so erhalten wir eine Hilfskorrespondenz $[1, 2(n-r_i)]$. Der Punktreihe (s_0) entsprechen nämlich in (ω_1) und (ω_2) zwei projektive Punktreihen, deren Träger unikursale Kurven $S_1^{n-r_i}$ und $S_2^{n-r_i}$ von der $(n-r_i)$-ten Ordnung sind. Diese Punktreihen erzeugen eine Plankurve S von der Klasse $2(n-r_i)$; die $2(n-r_i)$ aus P an S gelegten Tangenten s' ordnen wir der Geraden s_0 zu. Aber dem F_i^0 entsprechen (Nr. 1) zwei projektive Punktreihen, deren Träger die Hauptkurven f_i^1 und f_i^2 sind. Ihr Erzeugnis ist eine Kurve $2r_i$-ter Klasse F, und jede von $2r_i$ durch F_i^0 an F gelegten Tangenten t verbindet drei homologe Punkte $A_0 = F_i^0$, A_1, A_2 der gegebenen Felder (ω_0), (ω_1), (ω_2). Durch den Punkt $P \equiv F_i^0$ gehen also $1 + 2(n-r_i) + 2r_i = 2n+1$ Geraden, und jede von ihnen verbindet je drei homologe Punkte der betrachteten Felder.

Im Büschel $(P)_\omega$ nehmen wir noch einmal die Gerade s_0 und betrachten die projektiven Punktreihen

$$s_0(A_0, B_0, \ldots) \,\overline{\wedge}\, S_1^n(A_1, B_1, \ldots),$$

welche durch homologe Punkte der Felder $(\omega_0)\,\pi^n(\omega_1)$ gebildet sind. Schneidet s_0 die Kurve S_1^n in n Punkten $B_1, C_1, \ldots$, so enthält diese Gerade $s_0 = B_0B_1 = C_0C_1 = \ldots$ n Paare homologer Punkte. Dem Elemente s_0 ordnen wir die n Geraden $s_2, \ldots$ zu, welche die entsprechenden Punkte $B_2, C_2, \ldots$ des Feldes (ω_2) mit dem Scheitel P verbinden. — Der Punktreihe $s_2(B_2, Q_2, \ldots)$ entsprechen in $(\omega_0)\,\pi^n(\omega_1)$ zwei projektive Punktreihen

$$S_0^n(B_0, Q_0, \ldots) \,\overline{\wedge}\, s_1(B_1, Q_1, \ldots),$$

---

[1]) R. Sturm, l. c. Bd. I. Nr. 177.

welche eine Plankurve S von der Klasse $n+1$ erzeugen. Die $n+1$ aus P an S gelegten Tangenten $s_0 = Q_0Q_1, \ldots$ ordnen wir der Geraden s_2 zu. Es folgt aus der so erhaltenen Korrespondenz $[n+1, n]$, daß jede von $2n+1$ Koinzidenzgeraden dieser Verwandtschaft je drei homologe Punkte der Felder (ω_0), (ω_1) und (ω_2) verbindet.

Anmerkung: Fällt der Scheitel P *mit dem* r_i-fachen Hauptpunkte F_i^0 des Feldes (ω_0) zusammen, so schneidet die Gerade s_0 die entsprechende Kurve $S_1^{n-r_i}$ in $n-r_i$ Punkten $B_1, C_1, \ldots$ und die Fundamentalkurve f_i^1 des Feldes (ω_1) in r_i Punkten $X_1, Y_1, \ldots$ Die Gerade $s_0 = B_0B_1 = C_0C_1 = \ldots = X_0X_1 = Y_0Y_1 = \ldots$ enthält auch in diesem Falle n Paare homologer Punkte der Felder (ω_0), (ω_1).

Aus diesen Untersuchungen ergibt sich folgender Satz:

Sind zwischen dem Punktfelde (ω_0) *und jedem von zwei kollinearen Punktfeldern* (ω_1), (ω_2) *Cremonasche Verwandtschaften n. Grades festgestellt, so gehen durch irgendeinen festen Punkt* P — der in der gemeinsamen Trägerebene dieser drei kollokalen Felder liegt — $2n+1$ *solche Geraden, daß jede von ihnen je drei homologe Punkte dieser Felder verbindet.*

Den s_k-fachen Hauptpunkten F_k^1 und F_k^2 der Felder (ω_1), (ω_2) entsprechen (Nr. 1) in dem Felde (ω_0) alle Punkte der Fundamentalkurve f_k^0 von der Ordnung s_k. Es folgt unmittelbar:

Jede Gerade $F_k^1F_k^2$, *welche zwei homologe* s_k*-fache Hauptpunkte der betrachteten kollokalen Felder* (ω_1) *und* (ω_2) *verbindet, enthält* s_k *Tripel entsprechender Punkte* P_ε^0, F_k^1 *und* F_k^2 *der Felder* (ω_0), (ω_1), (ω_2), *wo mit* P_ε^0, $\varepsilon = 1, 2, \ldots, s_k$, *die Schnittpunkte dieser Gerade und der Hauptkurve* f_k^0 *des Feldes* (ω_0) *bezeichnet sind.*

Sind e, e', e'' die drei Koinzidenzgeraden der kollinearen Felder (ω_1) und (ω_2), so sind die homologen Punktreihen

$$e(A_1, B_1, \ldots) \barwedge e(A_2, B_2, \ldots)$$

in (ω_0) die Punkte $A_0, B_0, \ldots$ der unikursalen Kurve n. Ordnung E_n^0 zugeordnet. Schneidet e die Kurve E_n^0 in n Punkten $C_0, D_0, \ldots$, so enthält diese Gerade n Tripel homologer Punkte: $C_0C_1C_2, D_0D_1D_2, \ldots$

Jede von den drei Koinzidenzgeraden der kollokalen kollinearen Felder (ω_1), (ω_2) *enthält n Tripel homologer Punkte der Felder* (ω_0), (ω_1) *und* (ω_2).

Es soll noch bemerkt werden, daß die in Nr. 3 durchgeführten Beweise gelten, wenn der Scheitel P des Büschels $(P)_\omega$: a) auf der Koinzidenzgeraden e liegt, b) mit dem Koinzidenzpunkte $E = e\,e' = E_1 = E_2$ der kollinearen Felder (ω_1) und (ω_2) zusammenfällt, c) auf der Geraden $F_k^1F_k^2$ liegt. Von den $2n+1$ Geraden, die je ein Tripel homologer Punkte der Felder (ω_0), (ω_1) und (ω_2) enthalten, fallen: a) n Geraden mit der Koinzidenzgeraden e zusammen, b) n Geraden mit e, n Geraden mit e' und eine mit der Geraden $E\,E_0$ zusammen, c) s_k Geraden mit $F_k^1F_k^2$ zusammen.

4. *Eigenschaften dreier konzentrischer Bündel* (bzw. kollokaler Strahlenfelder). Aus dualen Untersuchungen ergeben sich folgende Sätze:

Sind zwischen dem Ebenenbündel (W_0) *und jedem von zwei kollinearen Ebenenbündeln* (W_1), (W_2) *Cremonasche Verwandtschaften n. Grades festgestellt, so liegen in irgendeiner festen Ebene* π — die durch den gemeinsamen Scheitel dieser drei konzentrischen Bündel geht — $2n+1$ *solche Geraden, daß in jeder von ihnen je drei homologe Ebenen dieser Bündel sich schneiden.*

Jede Gerade $\varphi_k^1\varphi_k^2$, in der zwei homologe s_k-fache Hauptebenen der betrachteten Bündel (W_1) und (W_2) sich schneiden, enthält s_k Tripel entsprechender Ebenen π_ε^0, φ_k^1 und φ_k^2 der konzentrischen Bündel (W_0), (W_1), (W_2), wo mit π_ε^0, $\varepsilon = 1, 2, \ldots, s_k$, die durch diese Gerade an den Hauptkegel Φ_k^0 des Bündels (W_0) gelegten Tangentialebenen bezeichnet sind.

Jede von den drei Koinzidenzgeraden der konzentrischen kollinearen Bündel (W_1), (W_2) enthält n Tripel homologer Ebenen der Bündel (W_0), (W_1) und (W_2).

Sind zwischen dem Strahlenbündel (W_0) und jedem von zwei kollinearen Strahlenbündeln (W_1), (W_2) Cremonasche Verwandtschaften n. Grades festgestellt, so gehen durch irgendeine feste Gerade p — die den gemeinsamen Scheitel dieser drei konzentrischen Bündel enthält — $2n + 1$ solche Ebenen, daß in jeder von ihnen je drei homologe Geraden dieser Bündel liegen.

Jede Ebene $f_k^1 f_k^2$, welche zwei homologe s_k-fache Hauptgeraden der betrachteten konzentrischen Strahlenbündel (W_1) und (W_2) verbindet, enthält s_k Tripel entsprechender Geraden p_ε^0, f_k^1 und f_k^2 der Bündel (W_0), (W_1), (W_2), wo mit p_ε^0, $\varepsilon = 1, 2, \ldots, s_k$, die Schnittgeraden dieser Ebene und des Hauptkegels Φ_k^0 des Bündels (W_0) bezeichnet sind.

Jede von den drei Koinzidenzebenen der konzentrischen kollinearen Bündel (W_1), (W_2) enthält n Tripel homologer Geraden der Bündel (W_0), (W_1) und (W_2).

Sind zwischen dem Strahlenfelde (ω_0) und jedem von zwei kollinearen Strahlenfeldern (ω_1), (ω_2) Cremonasche Verwandtschaften n. Grades festgestellt, so liegen in irgendeiner festen Gerade p — die in der gemeinsamen Trägerebene dieser drei kollokalen Felder liegt — $2n + 1$ solche Punkte, daß in jedem von ihnen je drei homologe Geraden dieser Felder sich schneiden.

Jeder Punkt $f_k^1 f_k^2$, in dem zwei homologe s_k-fache Hauptgeraden der betrachteten kollokalen Strahlenfelder (ω_1) und (ω_2) sich schneiden, enthält s_k Tripel entsprechender Geraden p_ε^0, f_k^1 und f_k^2 der Felder (ω_0), (ω_1), (ω_2), wo mit p_ε^0, $\varepsilon = 1, 2, \ldots, s_k$, die durch diesen Punkt an die Hauptkurve f_k^0 des Feldes (ω_0) gelegten Tangenten bezeichnet sind.

Jeder von den drei Koinzidenzpunkten der kollokalen kollinearen Felder $(\omega_1), (\omega_2)$ enthält n Tripel homologer Geraden der Felder (ω_0), (ω_1) und (ω_2).

5. *Plankurven $(2n - 1)$. Geschlechts als Erzeugnisse dreier kollokaler Felder.* Wir beweisen jetzt folgenden Satz:

Sind zwischen dem Punktfelde (ω_0) und jedem von zwei kollinearen Punktfeldern (ω_1), (ω_2) — die mit (ω_0) in derselben Trägerebene liegen — *Cremonasche Verwandtschaften n. Grades festgestellt, so erzeugen solche Verbindungsgeraden, die je ein Tripel homologer Punkte dieser Felder enthalten, eine Plankurve $(2n + 1)$. Klasse, $2(4n - 1)$. Ordnung und $(2n - 1)$. Geschlechts. Jede von den drei Koinzidenzgeraden der kollokalen kollinearen Felder (ω_1) und (ω_2) ist eine n-fache Tangente, und jede Gerade $F_k^1 F_k^2$, welche zwei homologe s_k-fache Hauptpunkte dieser Felder verbindet, ist eine s_k-fache Tangente dieser Plankurve K.*

Anmerkung: Im Falle der Jonquièresschen Verwandtschaft n. Grades besitzt die Plankurve K, außer den drei n-fachen, noch (s. Nr. 1) eine $(n - 1)$-*fache Tangente* $F_{n-1}^1 F_{n-1}^2$.

Die Klasse der Kurve K ist $2n + 1$, denn durch irgendeinen festen Punkt P der gemeinsamen Trägerebene ω gehen ebensoviele (s. Nr. 3) Verbindungsgeraden je dreier homologer Punkte der Felder (ω_0), (ω_1) und (ω_2) hindurch. Diese Geraden bilden aber die aus P an die Kurve K gelegten Tangenten.

Jedem von den $n+2$ Koinzidenzpunkten, z. B. dem Punkt $Q_0 = Q_1$, der Felder $(\omega_0)\,\pi^n(\omega_1)$ entspricht in (ω_2) nur ein einziger Punkt Q_2. Die Verbindungsgerade der Punkte $Q_0 = Q_1$ und Q_2 ist eine Tangente der betrachteten Kurve K. Ist $Q_0' = Q_2'$ einer von den $n+2$ Koinzidenzpunkten der Felder $(\omega_0)\pi^n(\omega_2)$ und Q_1' ein ihm entsprechender Punkt in (ω_1), so bildet die Verbindungsgerade dieser Punkte eine Tangente der Kurve K. Den drei Koinzidenzpunkten $E = E_1 = E_2$, E' und E'' der Felder $(\omega_1)\varkappa(\omega_2)$ sind in (ω_0) die Punkte E_0, E_0' bzw. E_0'' zugeordnet. Die Geraden EE_0, $E'E_0'$ und $E''E_0''$ sind Tangenten der Kurve K.

Die Koinzidenzgerade $e = e_1 = e_2$ der kollinearen Felder (ω_1), (ω_2) enthält (s. Nr. 3) n Tripel homologer Punkte A_0, A_1, A_2; B_0, B_1, B_2; ... der drei gegebenen Felder. Die n Tangenten $a = A_0A_1A_2$, $b = B_0B_1B_2$, ... der untersuchten Kurve K sind mit der Gerade e zusammengefallen. Durch jeden Punkt P der Geraden e gehen $2n+1$ Tangenten der Kurve K — d. h. Verbindungsgeraden je dreier homologer Punkte der Felder (ω_0), (ω_1), (ω_2) —, und n von diesen Tangenten fallen (s. Nr. 3) mit e zusammen. Das Element e ergibt sich daher als eine *n-fache Tangente* der Kurve K.

Ganz analog erkennen wir, daß die Verbindungsgerade $F_k^1F_k^2$ zweier homologer s_k-facher Hauptpunkte der Felder (ω_1) und (ω_2) eine (s. Nr. 3) *s_k-fache Tangente* der Plankurve K bildet. Da aber eine s_k-fache Tangente für $\frac{1}{2}s_k(s_k-1)$ Doppeltangenten zählt, so zählen alle s_k-fachen Tangenten $F_k^1F_k^2$, $k = 1, 2, \ldots, \sigma$, der betrachteten Kurve K (s. die Beziehung II in Nr. 1) für

$$\sum_{k=1}^{\sigma} \tfrac{1}{2}s_k(s_k-1) = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

Doppeltangenten. Die drei n-fachen *Tangenten* e, e' und e'' der Kurve K zählen für $\frac{3}{2}n(n-1)$ Doppeltangenten. Die vielfachen Tangenten der K sind also den

$$\vartheta = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) + \tfrac{3}{2}n(n-1) = (n-1)(2n-1)$$

Doppeltangenten äquivalent. Endlich soll bemerkt werden, daß eine Kurve $(2n+1)$. Klasse, mit ϑ Doppeltangenten, von der Ordnung $2(4n-1)$ und vom Geschlecht $2n-1$ ist.

Aus dualen Untersuchungen ergibt sich folgender Satz:

Sind zwischen dem Strahlenfelde (ω_0) und jedem von zwei kollinearen Strahlenfeldern (ω_1), (ω_2) — die mit (ω_0) in derselben Trägerebene liegen — *Cremonasche Verwandtschaften n. Grades festgestellt, so erzeugen solche Schnittpunkte, die je ein Tripel homologer Geraden dieser Felder enthalten, eine Plankurve $(2n+1)$. Ordnung, $2(4n-1)$. Klasse und $(2n-1)$. Geschlechts. Jeder von den drei Koinzidenzpunkten der kollokalen kollinearen Felder (ω_1) und (ω_2) ist ein n-facher Punkt, und jeder Punkt $f_k^1f_k^2$,* in dem zwei homologe s_k-fache Hauptgeraden dieser Felder sich schneiden, *ist ein s_k-facher Punkt dieser Plankurve.*

Anmerkung: Sind Jonquièressche Verwandtschaften n. Grades festgestellt, so besitzt diese Kurve, außer den drei n-fachen, noch einen *$(n-1)$-fachen Punkt $f_{n-1}^1f_{n-1}^2$.*

Ganz analoge Sätze gelten für die Kegelflächen $(2n+1)$. Ordnung (bzw. Klasse) und $(2n-1)$. Geschlechts, welche durch die in Nr. 4 angegebenen Ebenenbündel (resp. Strahlenbündel) (W_0), (W_1), (W_2) erzeugt sind.

6. *Die mit dem Erzeugnis dreier kollokaler Punktfelder zusammenhängenden Plankurven $(2n-1)$. Geschlechts.* Sind $a = A_0A_1A_2$, $b = B_0B_1B_2$, ... die sämtlichen Tangenten der in Nr. 5 untersuchten Plankurve K, so kann man nach den Kurven C^0, C^1 fragen, welche durch die Punkte

a) $A_0, B_0, \ldots$ des Feldes (ω_0),

b) $A_\iota, B_\iota, \ldots$ $(\iota = 1, 2)$ des Feldes (ω_ι)

erzeugt sind.

Aus der [1, 1]-deutigen Verwandtschaft zwischen den Punkten $A_0, B_0, \ldots$ der Kurve C^0 und den Tangenten $a = A_0 A_1 A_2$, $b = B_0 B_1 B_2, \ldots$ der Kurve K (Nr. 5) vom $(2n-1)$. Geschlecht — folgt unmittelbar, daß *die Kurve C^0 auch vom Geschlecht $2n-1$ ist.* Um die Ordnung der C^0 zu bestimmen, nehmen wir im Punktfelde (ω_0) eine beliebige Gerade s_0 an. Der Punktreihe (s_0) entsprechen bekanntlich — vgl. die Relation (4) in Nr. 3 — in (ω_1) und (ω_2) zwei Punktreihen (S_1^n) und (S_2^n), deren Träger unikursale Plankurven n. Ordnung S_1^n, S_2^n sind. Die projektiven Punktreihen

$$(s_0) \barwedge (S_1^n) \barwedge (S_2^n)$$

liegen in der gemeinsamen Trägerebene ω der gegebenen Punktfelder und besitzen [1]) solche $1 + n + n = 2n + 1$ Tripel homologer Punkte, von denen jedes Tripel in je einer Geraden liegt. Da aber jede solche Gerade eine Tangente der Plankurve K bildet, so enthält die beliebige Gerade s_0 $2n + 1$ Punkte $A_0, \ldots$, durch welche die Tangenten $a = A_0 A_1 A_2, \ldots$ der Kurve K hindurchgehen. Die Punkte $A_0, B_0, \ldots$ des Feldes (ω_0) erzeugen daher eine Kurve C^0 *von der Ordnung* $2n + 1$.

Geht die angenommene Gerade s_0 durch den r_i-fachen Hauptpunkt F_i^0 des Feldes (ω_0) hindurch, so erhalten wir (vgl. Nr. 3) drei projektive Punktreihen

$$(s_0) \barwedge (S_1^{n-r_i}) \barwedge (S_2^{n-r_i}).$$

Sie besitzen $1 + (n - r_i) + (n - r_i)$ Tripel homologer Punkte, von denen jedes Tripel in je einer Tangente $d, \ldots$ der Kurve K liegt. Aber dem F_i^0 entsprechen (Nr. 1) zwei projektive Punktreihen, deren Träger die Hauptkurven r_i-ter Ordnung f_i^1, f_i^2 sind. Sie erzeugen (Nr. 3) eine Kurve $2r_i$-ter Klasse F, und jede von $2r_i$ durch F_i^0 an diese Kurve F gelegten Tangenten $t = A_1 A_2$ enthält drei homologe Punkte $A_0 = F_i^0$, A_1, A_2 und bildet daher eine Tangente der Kurve K. Die $1 + 2(n - r_i)$ Tangenten $d, \ldots$ und $2r_i$ Tangenten $t, \ldots$ der Kurve K schneiden unsere Gerade s_0 in Punkten, welche der Plankurve C^0 angehören. Von den $1 + 2(n - r_i) + 2r_i = 2n + 1$ Schnittpunkten der Geraden s_0 mit der Kurve C^0 vereinigen sich $2r_i$ Punkte $s_0 t, \ldots$ im Hauptpunkte F_i^0. — Diese Eigenschaft besitzt jede durch F_i^0 gehende Gerade s_0, und der r_i-fache Hauptpunkt F_i^0 ergibt sich als $2r_i$-*facher Punkt* der Kurve C^0.

Ein $2r_i$-facher Punkt zählt für

$$\tfrac{1}{2} \cdot 2r_i(2r_i - 1) = r_i(r_i - 1) + r_i^2$$

Doppelpunkte; somit zählen alle $2r_i$-fachen Punkte F_i^0, $i = 1, 2, \ldots, \varrho$, der Kurve C^0 für

$$2 \Sigma \tfrac{1}{2} r_i(r_i - 1) + \Sigma r_i^2 = \vartheta$$

Doppelpunkte. Aus den Relationen (II) und (I) in Nr. 1 folgt:

$$\vartheta = 2 \cdot \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) + (n^2 - 1) = (n-1)(2n-1).$$

Im Falle der Jonquièresschen Verwandtschaften besitzt die Kurve C^0 (s. Nr. 1) einen $2(n-1)$-fachen Punkt F_{n-1}^0 und $2(n-1)$ Doppelpunkte $F_1^0, F_2^0, \ldots$ Diese vielfachen Punkte sind also den

---

[1]) R. Sturm, l. c. Bd. I. Nr. 177.

$$\vartheta = \tfrac{1}{2}(2n-2)(2n-3) + 2(n-1) = (n-1)(2n-1)$$

Doppelpunkten äquivalent.

Die Kurve $(2n+1)$. Ordnung C^0 ist daher $2(4n-1)$. Klasse und $(2n-1)$. Geschlechts, wie zu beweisen war.

Ganz analog können wir beweisen, daß die Punkte $A_\iota, B_\iota, \ldots$ $(\iota = 1, 2)$ des Feldes (ω_ι) auf einer Kurve C^ι $(n+2)$. Ordnung, $6n$. Klasse und $(2n-1)$. Geschlechts liegen. Jeder s_k-fache Hauptpunkt F_k^ι in (ω_ι) ist ein s_k-facher Punkt der C^ι. Im Falle der Jonquièresschen Verwandtschaften besitzt C^ι einen $(n-1)$-fachen Punkt F_{n-1}^ι.

Zu diesem Zwecke müssen wir in (ω_ι) eine beliebige Gerade s_ι annehmen und die projektiven Punktreihen

$$(S_0^n) \barwedge (s_1) \barwedge (s_2)$$

betrachten. Geht die Gerade s_ι durch den s_k-fachen Hauptpunkt F_k^ι des Feldes (ω_ι) hindurch, so erhalten wir die projektiven Punktreihen

$$(S_0^{n-s_k}) \barwedge (s_1) \barwedge (s_2)$$

und die dem Fundamentalpunkte F_k^ι in (ω_0) zugeordnete Punktreihe auf der Hauptkurve f_k^0. Bezeichnet man mit $G_0, \ldots$ die s_k Schnittpunkte der f_k^0 und der Geraden $F_k^1 F_k^2$, so enthält diese letzte Gerade s_k Tripel je dreier homologer Punkte $G_0, G_1 = F_k^1, G_2 = F_k^2; \ldots$ und ist (s. Nr. 3 und Nr. 5) eine s_k-fache Tangente der Kurve K. Aus diesen Betrachtungen folgt, daß die beliebige Gerade s_ι die Kurve C^ι in $(n-s_k)+1+1$ Punkten und in s_k mit dem Hauptpunkte F_k^ι identischen Punkten schneidet. Das Element F_k^ι $(\iota = 1, 2)$ ist daher ein s_k-facher Punkt der Kurve C^ι, wie zu beweisen war.

Die Kurve C^ι können wir auch folgendermaßen erhalten. Der vorher konstruierten Kurve C^0 des Feldes (ω_0) entspricht in (ω_ι) — vgl. die Relationen (I), (IV), (II) in Nr. 1 und die Werte $\nu = 2n+1$, $l_i = 2r_i$ — eine Kurve C^ι von der Ordnung

$$\nu n - \Sigma l_i r_i = \nu n - \Sigma 2 r_i^2 = (2n+1)n - 2(n^2-1) = n+2,$$

welche in dem s_k-fachen Hauptpunkte F_k^ι die Multiplizität

$$\nu s_k - \Sigma l_i \mu_{ik}^0 = \nu s_k - \Sigma 2 r_i \mu_{ik}^0 = (2n+1)s_k - 2n\, s_k = s_k$$

besitzt. Weil alle s_k-fache Punkte F_k^ι, $k = 1, 2, \ldots, \sigma$, der Kurve $(n+2)$. Ordnung C^ι den

$$\Sigma \tfrac{1}{2} s_k(s_k-1) = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) = \vartheta$$

Doppelpunkten äquivalent sind, so ist bekanntlich diese Kurve von der Klasse $6n$ und vom Geschlecht $2n-1$.

Es gelten daher folgende Sätze:

Sind $a = A_0 A_1 A_2$, $b = B_0 B_1 B_2, \ldots$ *die sämtlichen Tangenten der Kurve* K $(2n+1)$. Klasse, $2(4n-1)$. Ordnung und $(2n-1)$. Geschlechts, welche das Erzeugnis (vgl. Nr. 5) der Punktfelder (ω_0), (ω_1) und (ω_2) ist, *so erzeugen*:

a) *die Punkte* $A_0, B_0, \ldots$ *des Feldes* (ω_0) *eine Plankurve* C^0 $(2n+1)$. *Ordnung,* $2(4n-1)$. *Klasse und* $(2n-1)$. *Geschlechts, die jeden* r_i*-fachen Hauptpunkt* F_i^0 *dieses Feldes zum* $2r_i$*-fachen Punkte besitzt.*

b) *die Punkte* $A_\iota, B_\iota, \ldots$ $(\iota = 1, 2)$ *des Feldes* (ω_ι) *eine Kurve* C^ι $(n+2)$. *Ordnung,* $6n$. *Klasse und* $(2n-1)$. *Geschlechts, welche jeden* s_k*-fachen Hauptpunkt* F_k^ι *dieses Feldes zum* s_k*-fachen Punkt besitzt.*

Anmerkung: Sind Jonquièressche Verwandtschaften n. Grades festgestellt, so besitzt: a) die Kurve C^0 einen $2(n-1)$-fachen Punkt F^0_{n-1} und $2(n-1)$ Doppelpunkte $F^0_1, F^0_2, \ldots$; b) die Kurve C^ι einen $(n-1)$-fachen Punkt F^ι_{n-1}.

Ganz analoge Sätze gelten für die in Nr. 5 betrachteten Kegelflächen $(2n+1)$. Ordnung (bzw. Klasse) und Plankurven $(2n+1)$. Ordnung.

Aus der [1, 1]-deutigen Korrespondenz zwischen den Punkten $A_1, B_1, \ldots$ der Kurve $(n+2)$. Ordnung C^1 und den Punkten $A_2, B_2, \ldots$ der Kurve $(n+2)$. Ordnung C^2 folgt, daß die Geraden $A_1 A_2, B_1 B_2, \ldots$ eine Plankurve $2(n+2)$. Klasse erzeugen [1]). Sie zerfällt in drei Strahlenbüschel, deren Scheitel die Koinzidenzpunkte $E = E_1 = E_2, E', E''$ der kollinearen Felder $(\omega_1), (\omega_2)$ sind, und in eine Kurve $(2n+1)$. Klasse. Aus den bisherigen Betrachtungen ergibt sich sofort, daß die Tangenten $A_1 A_2 = A_0 A_1 A_2 = a$, $B_1 B_2 = B_0 B_1 B_2 = b, \ldots$ der in Nr. 5 untersuchten Kurve $(2n+1)$. Klasse K angehören.

Die Korrespondenz [1, 1] zwischen den Punkten $A_0, B_0, \ldots$ der Kurve $(2n+1)$. Ordnung C^0 und den Punkten $A_\iota, B_\iota, \ldots$ $(\iota = 1, 2)$ der Kurve $(n+2)$. Ordnung C^ι führt zu einer Kurve von der Klasse $3(n+1)$. Sie zerfällt in $n+2$ Strahlenbüschel, deren Scheitel die Koinzidenzpunkte der Punktfelder $(\omega_0)\pi^n(\omega_\iota)$ sind, und in die Kurve $(2n+1)$. Klasse K mit den Tangenten $A_0 A_\iota = A_0 A_1 A_2 = a, \ldots$

7. *Eigenschaften von vier kollokalen Feldern.* Zwischen vier gegebenen Punktfeldern, welche eine gemeinsame Trägerebene ω besitzen, stellen wir (vgl. Nr. 1) folgende Beziehungen her:

$$(5) \qquad (\omega_1)\varkappa(\omega_2)\varkappa(\omega_3), \quad (\omega_0)\pi^n(\omega_1), \quad (\omega_0)\pi^n(\omega_2), \quad (\omega_0)\pi^n(\omega_3).$$

Man kann fragen, wie oft vier homologe Punkte A_0, A_1, A_2 und A_3 dieser kollokalen Felder in je einer Geraden liegen.

Aus (5) ergibt sich eine Korrespondenz [1, 1] zwischen den Punkten $A_3, B_3, \ldots$ der Kurve C^3 von der Ordnung $n+2$ — welche kollinear der in Nr. 6 betrachteten Kurve C^ι $(\iota = 1, 2)$ zugeordnet ist — und den Tangenten $a = A_0 A_1 A_2$, $b = B_0 B_1 B_2, \ldots$ der (Nr. 5) Kurve $(2n+1)$. Klasse K. Für die Gebilde C^3 und K fällt [1]) $(n+2) + (2n+1) = 3(n+1)$-mal ein Punkt X_3 in die entsprechende Tangente $x = X_0 X_1 X_2$. Die gegebenen Felder besitzen daher $3(n+1)$ Quadrupel homologer Punkte, die in je einer Geraden liegen.

Die Verbindungsgeraden $a' = A_1 A_2 A_3$, $b' = B_1 B_2 B_3, \ldots$ je dreier homologer Punkte der kollinearen Felder erzeugen [2]) eine allgemeine Kurve 3. Klasse C'. Eine gemeinsame Tangente der Kurven K und C' kann entweder durch Vereinigung der Tangente $a = A_0 A_1 A_2$ der K mit der Tangente $d' = D_1 D_2 D_3$ der C', oder durch Vereinigung der Tangenten $b = B_0 B_1 B_2$ und $b' = B_1 B_2 B_3$ entstehen. Im ersten Falle ist $a = d'$ eine Koinzidenzgerade $A_1 D_1 = A_2 D_2$ der Felder $(\omega_1)\varkappa(\omega_2)$, im zweiten enthält $b = b'$ vier homologe Punkte B_0, B_1, B_2, B_3 der gegebenen Felder. Jede von den drei Koinzidenzgeraden der Felder $(\omega_1)\varkappa(\omega_2)$, als eine einfache Tangente der C' und eine n-fache Tangente (Nr. 5) der K, ist n gemeinsamen Tangenten der Kurven C' und K äquivalent. Die übrigen $3(2n+1) - 3n = 3(n+1)$ gemeinsamen Tangenten beweisen, daß $3(n+1)$-mal vier homologe Punkte der gegebenen Felder in je einer Geraden liegen.

---

[1]) R. Sturm, l. c. Bd. I. Nr. 177.

[2]) Th. Reye, Die Geometrie der Lage, Bd. III (IV. Aufl.) S. 86.

Dasselbe Resultat erhalten wir auch vermittels einer Korrespondenz $[1, n]$ zwischen den Geraden $s = P_0 P_1$ und $s' = P_2 P_3$ der Trägerebene ω, wo P_0, P_1, P_2, P_3 vier homologe Punkte der betrachteten Felder sind. Einer Punktreihe $s(A_0, B_0, \ldots)$, deren Träger eine beliebige Gerade s des Feldes (ω_0) ist, entspricht — vgl. die Relation (5) — in (ω_1) eine Punktreihe $S_1^n(A_1, B_1, \ldots)$ auf der Kurve n. Ordnung S_1^n. Schneidet s die S_1^n in n Punkten $P_1, R_1, \ldots$, so kann man der Geraden $s = P_0 P_1 = R_0 R_1 = \ldots$ die n Geraden $P_2 P_3, R_2 R_3, \ldots$ zuordnen. Aber der Geraden $s' = P_2 P_3$, die keine Koinzidenzgerade der Felder $(\omega_2) \varkappa (\omega_3)$ ist und nur ein Paar homologer Punkte dieser Felder enthält, entspricht eine einzige Gerade $s = P_0 P_1$.

Beschreibt die Gerade s einen Büschel $(T_0)_\omega$, der dem Felde (ω_0) angehört, so beschreibt bekanntlich die in (ω_1) zugeordnete Kurve n. Ordnung S_1^n auch einen Büschel $(S_1^n, \ldots)$. Homologe Elemente dieser projektiven Büschel schneiden sich [1]) in Punkten $P_1, R_1, \ldots$ einer Kurve T_1 von der Ordnung $n + 1$. Ihnen entsprechende Punkte $P_2, R_2, \ldots$ und $P_3, R_3, \ldots$ der Felder (ω_2) und (ω_3) liegen bzw. auf den Kurven $(n + 1)$. Ordnung T_2, T_3. Die Verbindungsgeraden $P_2 P_3, R_2 R_3, \ldots$, d. h. die $s', \ldots$, umhüllen[1]) eine Kurve $2(n + 1)$. Klasse T. Es sind also den Geraden $s, \ldots$ des Büschels $(T_0)_\omega$ die Tangenten $s', \ldots$ der Kurve T zugeordnet.

Beschreibt die Gerade $s' = P_2 P_3 = s_3$ in dem Felde (ω_3) einen Büschel $U_3(s_3, \ldots)$, so entspricht ihm im Felde (ω_2) ein Strahlenbüschel $U_2(s_2, \ldots)$. Den Punkten $P_2 = s_3 s_2, \ldots$ des (durch diese projektiven Büschel erzeugten) Kegelschnittes U_2^2 entsprechen in (ω_1) die Punkte $P_1, \ldots$ des Kegelschnittes $U^2{}_1$ und in (ω_0) die Punkte $P_0, \ldots$ einer unikursalen Kurve $2n$. Ordnung U_0. Die Verbindungsgeraden $P_1 P_0, \ldots$ homologer Punkte, d. h. die $s, \ldots$, umhüllen eine Kurve $2(n + 1)$. Klasse U. Es sind also den Geraden $s', \ldots$ des Büschels $(U_3)_\omega$ die Tangenten $s, \ldots$ der Kurve U zugeordnet.

Die auf diese Weise konstruierte Korrespondenz $[1, n]$ zwischen den Geraden $s = P_0 P_1$ und $s' = P_2 P_3$ der Trägerebene ω besitzt daher folgende Eigenschaft: sind T_0 und U_3 zwei beliebige Punkte der ω, so entsprechen den Geraden $s, \ldots$ des Büschels $(T_0)_\omega$ die Tangenten $s', \ldots$ einer Kurve $2(n + 1)$. Klasse T, und den Geraden $s', \ldots$ des Büschels $(U_3)_\omega$ die Tangenten $s, \ldots$ einer Kurve $2(n + 1)$. Klasse U. Diese Korrespondenz hat [2]) $1 + n + 2(n + 1) = 3(n + 1)$ Koinzidenzgeraden, und jede von ihnen enthält je vier homologe Punkte P_0, P_1, P_2, P_3 der gegebenen Felder.

Es ergeben sich daher die dual entsprechenden Sätze:

Sind zwischen dem Punktfelde (ω_0) und jedem von drei kollinearen Punktfeldern (ω_1), (ω_2), (ω_3) — die mit (ω_0) in derselben Trägerebene liegen — *Cremonasche Verwandtschaften n. Grades festgestellt, so liegen $3(n + 1)$-mal vier homologe Punkte dieser Felder in je einer geraden Linie.*

Sind zwischen dem Strahlenfelde (ω_0) und jedem von drei kollinearen Strahlenfeldern (ω_1), (ω_2), (ω_3) — die mit (ω_0) kollokal sind — *Cremonasche Verwandtschaften n. Grades festgestellt, so schneiden sich $3(n + 1)$-mal vier homologe Strahlen in je einem Punkte.*

Ganz analoge Sätze gelten für die konzentrischen Strahlenbündel, bzw. Ebenenbündel.

---

[1]) R. Sturm, l. c. Bd. I. Nr. 169, 177.

[2]) R. Sturm, l. c. Bd. IV. Nr. 839.

III.

8. *Eigenschaften dreier Ebenenbündel* (bzw. Punktfelder). Wir gehen nun über zur Betrachtung (vgl. Nr. 2) dreier Ebenenbündel:

$$(6) \qquad (W_1)\varkappa(W_2), \quad (W_0)\pi^n(W_1), \quad (W_0)\pi^n(W_2),$$

deren Scheitel drei beliebige und voneinander verschiedene Punkte W_0, W_1, W_2 sind.

Legt man durch irgend eine feste Gerade p eine beliebige Ebene ω, so schneidet ω die gegebenen Ebenenbündel (vgl. Nr. 2) in Strahlenfeldern

$$(7) \qquad (\omega_1)\varkappa(\omega_2), \quad (\omega_0)\pi^n(\omega_1), \quad (\omega_0)\pi^n(\omega_2).$$

Die Gerade p enthält (Nr. 4) aber $2n+1$ solche Punkte, daß in jedem von ihnen je drei homologe Geraden $a_0, a_1, a_2; \ldots$ dieser Felder sich schneiden. Weil $a_0 = \alpha_0\,\omega$, $a_1 = \alpha_1\,\omega$, $a_2 = \alpha_2\,\omega; \ldots$, so liegen auf p $2n+1$ Schnittpunkte $A = \alpha_0\,\alpha_1\,\alpha_2, \ldots$ je dreier homologer Ebenen der gegebenen Bündel. Es ist leicht zu erkennen, daß die Punkte $A, \ldots$ von der Lage der Schnittebene unabhängig sind. Eine andere durch p gelegte Ebene ω^* schneidet nämlich die betrachteten Ebenenbündel in Strahlenfeldern

$$(\omega_1^*)\varkappa(\omega_2^*), \quad (\omega_0^*)\pi^n(\omega_1^*), \quad (\omega_0^*)\pi^n(\omega_2^*),$$

und es liegen auf p $2n+1$ Schnittpunkte $A^* = a_0^*\,a_1^*\,a_2^*, \ldots$ je dreier homologer Geraden dieser Felder. Aus $a_0^*\,W_0 = \beta_0$, $a_1^*\,W_1 = \beta_1$, $a_2^*\,W_2 = \beta_2$ folgt unmittelbar, daß die durch $A^* = \beta_0\,\beta_1\,\beta_2$ gehenden homologen Ebenen unserer Bündel die erste Ebene ω in homologen Geraden b_0, b_1, b_2 der Felder (ω_0), (ω_1) und (ω_2) schneiden. Jeder Punkt $A^*, \ldots$ ist daher mit je einem von den vorher gefundenen Punkten $A, B, \ldots$ der Geraden p identisch, wie zu beweisen war.

Dasselbe Resultat erhalten wir auch vermittels einer Korrespondenz $[1, 2n]$ zwischen den Punkten der festen Geraden p. Einem Ebenenbüschel $c_0(\alpha_0, \beta_0, \ldots)$, dessen Achse $c_0 = CW_0$ einen beliebigen Punkt C der p mit dem Scheitel W_0 des Ebenenbündels (W_0) verbindet, entsprechen — vgl. die Relation (6) — in (W_1) und (W_2) zwei projektive Tangentialebenenbüschel

$$\Gamma_1^n(\alpha_1,\ \beta_1, \ldots) \barwedge \Gamma_2^n(\alpha_2,\ \beta_2, \ldots),$$

deren Träger unikursale Kegelflächen n. Klasse Γ_1^n, Γ_2^n sind. Diese Büschel erzeugen [1]) eine Regelfläche Γ vom Grade $2n$. Dem Punkte C ordnen wir die $2n$ Schnittpunkte $C', \ldots$ der Geraden p mit der Fläche Γ (bzw. mit den Erzeugenden $b_{12} = \beta_1\,\beta_2, \ldots$ dieser Regelfläche) zu.

Homologe Strahlen der kollinearen Bündel (W_1) und (W_2) schneiden sich [2]) in Punkten $A = a_1\,a_2, \ldots$ einer kubischen Raumkurve S_{12}^3, und homologe Ebenen dieser Bündel in Geraden $b_{12} = \beta_1\,\beta_2, \ldots$, welche Bisekanten der S_{12}^3 sind. Weil diese Geraden $b_{12}, \ldots$ eine Kongruenz 1-ter Ordnung und 3-ter Klasse bilden[2]), so geht durch den vorher erhaltenen Punkt C' eine einzige Gerade $b_{12} = \beta_1\,\beta_2$ dieser Kongruenz. Den Ebenen β_1 und β_2 entspricht in (W_0) die einzige Ebene β_0. Dem Punkte C' der Geraden p ordnen wir den Schnittpunkt $C = \beta_0 p$ zu. Auf diese Weise gelangen wir zu einer Punktkorrespondenz $[1, 2n]$ auf der Geraden p, und in jedem von ihren $2n+1$ Koinzidenzpunkten schneiden sich je drei homologe Ebenen der Bündel (W_0), (W_1), (W_2).

Ganz analog können wir eine Korrespondenz $[n, n-1]$ zwischen den Punkten der festen Geraden p herstellen. Dem Ebenenbüschel $c_1(\alpha_1, \beta_1, \ldots)$, wo $c_1 = CW_1$ die Verbindungsgerade des beliebigen Punktes C der p mit dem Scheitel des Bündels (W_1)

---

[1]) R. Sturm, l. c. Bd. I. Nr. 177.

[2]) Th. Reye, l. c. Bd. II. S. 164.

ist, entsprechen in (W_0) und (W_2) zwei projektive Ebenenbüschel

$$\Gamma_0^n(\alpha_0, \beta_0, \ldots) \barwedge c_2(\alpha_2, \beta_2, \ldots),$$

deren Träger eine unikursale Kegelfläche n. Klasse Γ_0^n und die Gerade c_2 sind. Die durch diese Büschel erzeugte Regelfläche $(n+1)$. Grades Γ schneidet die Gerade p in $n+1$ Punkten $C', \ldots$, welche wir dem Punkte C zuordnen. Homologe Ebenen der Bündel $(W_0)\pi^n(W_2)$ schneiden sich [1]) in Geraden $a_{02} = \alpha_0\,\alpha_2$, $b_{02} = \beta_0\,\beta_2, \ldots$ einer Kongruenz K_{02} von der Ordnung n und der Klasse $n+2$. Weil durch den Punkt C' n Geraden $a_{02}, b_{02}, \ldots$ der K_{02} hindurchgehen und den Ebenen $\alpha_0, \beta_0, \ldots$ bzw. $\alpha_2, \beta_2, \ldots$ im (W_1) n Ebenen $\alpha_1, \beta_1, \ldots$ entsprechen, so ordnen wir dem Punkte C' die n Schnittpunkte $C, \ldots$ der p mit den Elementen $\alpha_1, \beta_1, \ldots$ zu.

Es ergibt sich also folgender Satz:

Sind zwischen dem Ebenenbündel (W_0) und jedem von zwei kollinearen Ebenenbündeln (W_1), (W_2) Cremonasche Verwandtschaften n. Grades festgestellt, so liegen auf irgendeiner festen Geraden p — die durch keinen der voneinander verschiedenen Scheitelpunkte W_0, W_1, W_2 dieser Bündel hindurchgeht — *$2n+1$ Schnittpunkte je dreier homologer Ebenen der betrachteten Bündel.*

Den s_k-fachen Hauptebenen φ_k^1 und φ_k^2 der betrachteten Bündel (W_1), (W_2) entsprechen (Nr. 2) im (W_0) alle Tangentialebenen des Fundamentalkegels Φ_k^0 von der Klasse s_k. Es folgt unmittelbar:

Jeder Punkt P der Schnittgeraden $\varphi_k^1\,\varphi_k^2$ zweier homologer s_k-facher Hauptebenen der betrachteten Bündel (W_1) und (W_2) enthält s_k Tripel entsprechender Ebenen π_ε^0, φ_k^1 und φ_k^2, $\varepsilon = 1, 2, \ldots, s_k$, der Bündel (W_0), (W_1), (W_2), wo mit π_ε^0 die aus P an den Hauptkegel Φ_k^0 des Bündels (W_0) gelegten Tangentialebenen bezeichnet sind.

In einem beliebigen Punkte D der kubischen Raumkurve S_{12}^3 schneiden sich zwei zugeordnete Geraden d_1 und d_2 der Bündel $(W_1)\varkappa(W_2)$. Den projektiven Ebenenbüscheln

$$d_1(\beta_1, \ldots) \barwedge d_2(\beta_2, \ldots)$$

entsprechen im (W_0) die Tangentialebenen $\beta_0, \ldots$ eines unikursalen Kegels Δ_0^n von der Klasse n. Sind $\alpha_0, \ldots$ die n aus D an Δ_0^n gelegten Tangentialebenen, so gehen durch den Punkt D n Tripel homologer Ebenen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2; \ldots$ der gegebenen Bündel.

Jeder Punkt der kubischen Raumkurve S_{12}^3 — welche durch homologe sich schneidende Strahlen der kollinearen Bündel (W_1) und (W_2) erzeugt ist — *enthält n Tripel entsprechender Ebenen der betrachteten Ebenenbündel (W_0), (W_1) und (W_2).*

Aus unseren Betrachtungen folgt unmittelbar: Geht irgendeine feste Gerade p durch einen beliebigen: a) Punkt P der Schnittgeraden $\varphi_k^1\,\varphi_k^2$, b) Punkt D der kubischen Raumkurve S_{12}^3, so sind von den $2n+1$ auf p gelegenen Schnittpunkten je dreier homologer Ebenen der betrachteten Bündel (W_0), (W_1) und (W_2) im Falle: a) s_k Schnittpunkte mit P identisch, b) n Schnittpunkte mit D identisch.

Diesen Sätzen sind dual folgende zugeordnet:

Sind zwischen dem Punktfelde (ω_0) und jedem von zwei kollinearen Punktfeldern (ω_1), (ω_2) Cremonasche Verwandtschaften n. Grades festgestellt, so gehen durch irgendeine feste Gerade p — die auf keiner der voneinander verschiedenen Trägerebenen $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ dieser Punktfelder liegt — *$2n+1$ Verbindungsebenen je dreier homologer Punkte der betrachteten Felder.*

---

[1]) R. Sturm, l. c. Bd. IV. Nr. 791.

Jede Ebene π, welche durch die Verbindungsgerade $F_k^1 F_k^2$ zweier homologer s_k-facher Hauptpunkte der Felder (ω_1) und (ω_2) hindurchgeht, enthält s_k Tripel entsprechender Punkte P_ε^0, F_k^1 und F_k^2, $\varepsilon = 1, 2, \ldots s_k$, der Punktfelder (ω_0), (ω_1), (ω_2), wo mit P_ε^0 die in π liegenden Punkte der Fundamentalkurve f_k^0 des Feldes (ω_0) bezeichnet sind.

Jede Tangentialebene der kubischen Torsusfläche (der abwickelbaren Fläche 3. Klasse) Σ_{12}^3 — welche durch homologe sich schneidende Strahlen der kollinearen Felder (ω_1) und (ω_2) erzeugt ist — *enthält n Tripel homologer Punkte der betrachteten Felder* (ω_0), (ω_1), (ω_2).

9. *Die Fläche* $(2n+1)$*. Ordnung mit einer n-fachen kubischen Raumkurve, erzeugt durch drei Ebenenbündel.* Homologe Ebenen der Bündel, welche der Relation (6) genügen, schneiden sich in Punkten $A = \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2$, $B = \beta_0 \beta_1 \beta_2, \ldots$ einer krummen Fläche Ψ. Um die Ordnung dieser Oberfläche zu bestimmen, konstruieren wir die Schnittpunkte irgendeiner Geraden p mit Ψ. Weil p (Nr. 8) im allgemeinen $2n+1$ solche Punkte enthält, daß jeder von ihnen ein Schnittpunkt dreier homologer Ebenen dieser Bündel ist und der Ψ angehört, so ist diese Fläche von der Ordnung $2n+1$.

Aus Nr. 8 folgt, daß jeder Punkt D der kubischen Raumkurve S_{12}^3 ein n-facher Punkt, und jeder Punkt P der Geraden $\varphi_k^1 \varphi_k^2$ ein s_k-facher Punkt der betrachteten Fläche ist.

Es ergeben sich daher die einander dual zugeordneten Sätze:

Sind zwischen dem Ebenenbündel (W_0) und jedem von zwei kollinearen Ebenenbündeln (W_1), (W_2) — deren Scheitelpunkte beliebig und voneinander verschieden sind — *Cremonasche Verwandtschaften n. Grades festgestellt, so erzeugen die Schnittpunkte sämtlicher Tripel homologer Ebenen dieser Bündel eine Fläche* $(2n+1)$*. Ordnung. Die kubische Raumkurve S_{12}^3,* in deren Punkten je zwei homologe Strahlen der kollinearen Bündel (W_1) und (W_2) sich schneiden, *ist eine n-fache Kurve dieser Fläche. Jede Schnittgerade $\varphi_k^1 \varphi_k^2$ zweier homologer s_k-facher Hauptebenen der betrachteten Bündel (W_1) und (W_2) ist eine s_k-fache Gerade dieser Fläche.*

Sind zwischen dem Punktfelde (ω_0) und jedem von zwei kollinearen Punktfeldern (ω_1), (ω_2) — deren Trägerebenen beliebig und voneinander verschieden sind — *Cremonasche Verwandtschaften n. Grades festgestellt, so erzeugen die Verbindungsebenen sämtlicher Tripel homologer Punkte dieser Felder eine Fläche* $(2n+1)$*. Klasse X. Jede Tangentialebene der kubischen Torsusfläche Σ_{12}^3,* welche durch homologe sich schneidende Strahlen der kollinearen Felder (ω_1) und (ω_2) erzeugt ist, *ist eine n-fache Tangentialebene dieser Fläche X. Jede Ebene, welche durch die Verbindungsgerade $F_k^1 F_k^2$ zweier homologer s_k-facher Hauptpunkte der Felder (ω_1) und (ω_2) hindurchgeht, ist eine s_k-fache Tangentialebene dieser Fläche X.*

Es soll noch bemerkt werden [1]), daß die Fläche Ψ noch $2(n+2)$ andere einfache Geraden besitzt.

Anmerkung: Sind Jonquièressche Verwandtschaften n. Grades festgestellt, so besitzt die Fläche Ψ eine $(n-1)$-fache Gerade $\varphi_{n-1}^1 \varphi_{n-1}^2$ und $2(n-1)$ einfache Geraden $\varphi_k^1 \varphi_k^2$, $k = 1, 2, \ldots, 2n-2$.

besitzt die Fläche X einen Büschel $(n-1)$-facher Tangentialebenen und $2(n-1)$ Büschel einfacher Tangentialebenen, deren Achsen die Geraden $F_{n-1}^1 F_{n-1}^2$ und $F_k^1 F_k^2$ sind.

[1]) Genauere Untersuchungen über diese Fläche werden in einer speziellen Abhandlung angegeben.

10. *Raumkurve 3n. Geschlechts als Erzeugnis von vier Ebenenbündeln.* Betrachtet man (vgl. Nr. 2) vier Ebenenbündel

$$(8)\quad (W_1)\varkappa(W_2)\varkappa(W_3), \quad (W_0)\pi^n(W_1), \quad (W_0)\pi^n(W_2), \quad (W_0)\pi^n(W_3),$$

deren Scheitel vier beliebige und voneinander verschiedene Punkte W_0, W_1, W_2 und W_3 sind, so erzeugen solche Schnittpunkte $A = \alpha_0\,\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3, \ldots$, daß in jedem von ihnen je vier homologe Ebenen dieser Bündel sich schneiden, eine Raumkurve R. Um die Ordnung der R zu bestimmen, schneiden wir diese Bündel mit einer beliebigen Ebene ω, welche die Scheitelpunkte W_0, W_ι $(\iota = 1, 2, 3)$ nicht enthält. Für so konstruierte kollokale Strahlenfelder

$$(\omega_1)\varkappa(\omega_2)\varkappa(\omega_3), \quad (\omega_0)\pi^n(\omega_1), \quad (\omega_0)\pi^n(\omega_2), \quad (\omega_0)\pi^n(\omega_3)$$

gibt es (Nr. 7) in ω solche $3(n+1)$ Punkte $B = b_0\,b_1\,b_2\,b_3, \ldots$, daß durch jeden von ihnen ein Quadrupel homologer Strahlen dieser Felder hindurchgeht. Aus $b_0 = \beta_0\,\omega$, $b_\iota = \beta_\iota\,\omega$, $(\iota = 1, 2, 3)$ folgt, daß B ein Schnittpunkt der homologen Ebenen β_0, β_1, β_2, β_3 unserer Bündel ist und der Raumkurve R angehört. Diese R ist $3(n+1)$. Ordnung, denn in ω liegen ebensoviele Punkte dieser Kurve.

Die Ordnung dieser Raumkurve R können wir auch folgendermaßen bestimmen. Die kollinearen Bündel (W_1), (W_2) und (W_3) erzeugen [1]) eine kubische Fläche Δ^3, die Bündel (W_0), (W_1) und (W_2) eine (Nr. 9) Fläche $(2n+1)$. Ordnung Ψ, mit n-facher kubischer Raumkurve S^3_{12}. Ein beliebiger Punkt $A = a_1\,a_2$ der S^3_{12} und die — den homologen Geraden a_1, a_2 der Bündel $(W_1)\varkappa(W_2)$ zugeordnete — Gerade a_3 des Bündels (W_3) bestimmen eine Ebene $\gamma_3 = Aa_3$. Weil ihr entsprechende Ebenen γ_1 und γ_2 durch den Punkt A hindurchgehen, so liegt $A = \gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3$ auf der Fläche Δ^3. Die Oberflächen Δ^3 und Ψ durchdringen sich in einer Kurve $3(2n+1)$. Ordnung, welche in die n-fache kubische Raumkurve S^3_{12} und in die untersuchte Raumkurve $3(n+1)$. Ordnung R zerfällt. In einem beliebigen Punkte P der Raumkurve R, der ein einfacher Punkt der Flächen Ψ und Δ^3 ist, schneiden sich je drei homologe Ebenen: entweder a) $\alpha_0\,\alpha_1\,\alpha_2 = P$ bzw. $\beta_1\,\beta_2\,\beta_3 = P$, oder b) $\alpha_0\,\alpha_1\,\alpha_2 = P$ bzw. $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 = P$ der gegebenen Bündel. Im ersten Falle — gegen Voraussetzung — ergibt sich aber, daß P als Schnittpunkt homologer Strahlen $c_1 = \alpha_1\,\beta_1$ und $c_2 = \alpha_2\,\beta_2$ der Bündel $(W_1)\varkappa(W_2)$ der Kurve S^3_{12} angehört. Im zweiten Falle enthält P vier homologe Ebenen α_0, α_1, α_2, α_3, und liegt auf der untersuchten Raumkurve R, wie zu beweisen war.

Aus der Relation (8) folgt, daß durch den Schnittpunkt $\varphi^1_k\varphi^2_k\varphi^3_k$ dreier homologer s_k-facher Hauptebenen der Bündel (W_1), (W_2), (W_3) s_k Tangentialebenen γ_0, δ_0, ... des Hauptkegels Φ^0_k hindurchgehen. Weil aber die Ebenen γ_0, δ_0, ... des Bündels (W_0) den drei angegebenen Hauptebenen zugeordnet sind, so enthält der Punkt $\varphi^1_k\varphi^2_k\varphi^3_k$ s_k Quadrupel homologer Ebenen und ergibt sich daher als *s_k-facher Punkt* der betrachteten Raumkurve R. Alle solchen s_k-fachen Punkte $\varphi^1_k\varphi^2_k\varphi^3_k$, $k = 1, 2, \ldots, \sigma$, der R zählen (s. die Beziehung II in Nr. 1) für

$$\Sigma\,\tfrac{1}{2}\,s_k(s_k - 1) = \tfrac{1}{2}\,(n-1)\,(n-2) = \vartheta$$

Doppelpunkte.

In Nr. 11 weisen wir nach, daß die Raumkurve $3(n+1)$. Ordnung R vom Geschlecht $3n$ ist. Die Projektion dieser Raumkurve R aus einem beliebigen Punkte des Raumes auf eine Ebene ε ist bekanntlich eine Plankurve R' $3(n+1)$. Ordnung und $3n$. Geschlechts. Weil die Projektion eines s_k-fachen Punktes der R ebenso ein s_k-facher

[1]) H. Graßmann in Crelles Journal **49** (1855).

Punkt für die R' ist, so sind die Projektionen aller vielfachen Punkte der Raumkurve R den ϑ Doppelpunkten der Plankurve R' äquivalent. Aus der Ordnung und dem Geschlechte der R' folgt, daß diese Plankurve noch weitere $n(4n+3) = \vartheta_1$ Doppelpunkte und $3(9n+1)$ Wendetangenten besitzt und von der Klasse $4(3n+1)$ ist. Da aber die Projektion auf eine Ebene einer Raumkurve r. Ranges und i. Klasse, welche d Doppelpunkte und d_1 scheinbare Doppelpunkte besitzt, eine Plankurve r. Klasse mit i Wendetangenten und $d + d_1$ Doppelpunkten ist, so folgt unmittelbar:

Sind zwischen dem Ebenenbündel (W_0) *und jedem von drei kollinearen Ebenenbündeln* (W_ι) $(\iota = 1, 2, 3)$ — deren Scheitelpunkte W_0, W_ι beliebig und voneinander verschieden sind — *Cremonasche Verwandtschaften n. Grades festgestellt, so erzeugen solche Schnittpunkte, die je ein Quadrupel homologer Ebenen dieser Bündel enthalten, eine Raumkurve* $3(n+1)$. *Ordnung,* $3(9n+1)$. *Klasse,* $4(3n+1)$. *Rangs und* $3n$. *Geschlechts, welche* $n(4n+3)$ *scheinbare Doppelpunkte und jeden Schnittpunkt* $\varphi_k^1 \varphi_k^2 \varphi_k^3$ *dreier homologer* s_k*-facher Hauptebenen der Bündel* (W_ι) *zu einem* s_k*-fachen Punkte besitzt.*

Anmerkung: Sind Jonquièressche Verwandtschaften n. Grades festgestellt, so besitzt diese Raumkurve $n(4n+3)$ scheinbare Doppelpunkte und einen $(n-1)$*-fachen* Punkt $\varphi_{n-1}^1 \varphi_{n-1}^2 \varphi_{n-1}^3$.

Diesem Satze ist dual folgender zugeordnet:

Sind zwischen dem Punktfelde (ω_0) *und jedem von drei kollinearen Punktfeldern* (ω_ι) $(\iota = 1, 2, 3)$ — deren Trägerebenen ω_0, ω_ι beliebig und voneinander verschieden sind — *Cremonasche Verwandtschaften n. Grades festgestellt, so erzeugen solche Verbindungsebenen, die je ein Quadrupel homologer Punkte dieser Felder enthalten, einen Torsus* $3(n+1)$. *Klasse,* $3(9n+1)$. *Rangs,* $4(3n+1)$. *Ordnung und* $3n$. *Geschlechts, welcher* $n(4n+1)$ *scheinbare Doppelebenen und jede Verbindungsebene* $F_k^1 F_k^2 F_k^3$ *dreier homologer* s_k*-facher Hauptpunkte der Felder* (ω_ι) *zu einer* s_k*-fachen Tangentialebene besitzt.*

11. *Die mit dem Erzeugnis von vier Ebenenbündeln zusammenhängenden Kegelflächen* $3n$. *Geschlechts.* Sind $A = \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$, $B = \beta_0 \beta_1 \beta_2 \beta_3$, . . . die sämtlichen Punkte der in Nr. 10 untersuchten Raumkurve R, so kann man nach den Kegelflächen Γ^0 und Γ^ι fragen, welche durch die Ebenen

a) $\alpha_0, \beta_0, \ldots$ des Ebenenbündels (W_0)

b) $\alpha_\iota, \beta_\iota, \ldots$ $(\iota = 1, 2, 3)$ des Bündels (W_ι)

erzeugt sind.

Ist d_0 eine beliebige Gerade des Ebenenbündels (W_0), so entsprechen dem Ebenenbüschel (d_0) — vgl. die Relation (8) in Nr. 10 — bekanntlich in (W_ι) drei Tangentialebenenbüschel (Δ_ι^n), deren Träger unikursale Kegelflächen n. Klasse Δ_ι^n sind. Die projektiven Büschel

$$(d_0) \barwedge (\Delta_1^n) \barwedge (\Delta_2^n) \barwedge (\Delta_3^n)$$

besitzen [1]) solche $1 + n + n + n = 3n + 1$ Quadrupel homologer Ebenen, von denen jedes Quadrupel einen Schnittpunkt bestimmt. Da aber jeder solcher Punkt der Raumkurve R angehört, so gehen durch die beliebige Gerade d_0 $3n+1$ Ebenen $\alpha_0, \ldots$, welche bzw. die Punkte $A = \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, \ldots$ der Raumkurve R enthalten. Die Ebenen $\alpha_0, \ldots$ des Bündels (W_0) erzeugen daher eine Kegelfläche Γ^0 *von der Klasse* $3n+1$.

Liegt die angenommene Gerade d_0 auf der r_i-fachen Hauptebene φ_i^0 des Bündels (W_0), so erhalten wir (vgl. Nr. 3) vier projektive Büschel

$$(d_0) \barwedge (\Delta_1^{n-r_i}) \barwedge (\Delta_2^{n-r_i}) \barwedge (\Delta_3^{n-r_i}),$$

[1]) R. Sturm, l. c. Bd. I. Nr. 177.

deren Träger die Gerade d_0 und die Kegel $(n - r_i)$. Klasse $\Delta_i^{n-r_i}$ sind. Diese Büschel besitzen $1 + (n - r_i) + (n - r_i) + (n - r_i) = 3(n - r_i) + 1$ solche Quadrupel homologer Ebenen, von denen jedes Quadrupel je einen Punkt $B, \ldots$ der Raumkurve R bestimmt. — Aber dem Elemente φ_i^0 entsprechen (Nr. 2) drei projektive Tangentialebenenbüschel, deren Träger die Hauptkegel r_i-ten Klasse $\Phi_i^\iota (\iota = 1, 2, 3)$ sind. Sie erzeugen [1]) eine Raumkurve $3r_i$. Ordnung F, und die $3r_i$ auf der Ebene liegenden Punkte $D, \ldots$ der Kurve F gehören gleichzeitig auch der Raumkurve R an. Es gehen also jetzt durch die beliebige Gerade d_0 außer den $3(n - r_i) + 1$ Tangentialebenen $\beta_0, \ldots$ der Kegelfläche Γ^0 noch $3r_i$ weitere Tangentialebenen $\delta_0, \ldots$ (die bzw. die Punkte $B, \ldots$ und $D, \ldots$ der Raumkurve R enthalten). Diese letzteren $\delta_0, \ldots$ vereinigen sich aber mit der Hauptebene φ_i^0, und es ergibt sich — da jede auf φ_i^0 liegende Gerade d_0 diese Eigenschaften besitzt — diese r_i-fache Fundamentalebene φ_i^0 als eine *$3r_i$-fache Tangentialebene der* Kegelfläche Γ^0. Eine solche zählt für

$$\tfrac{1}{2} \cdot 3r_i(3r_i - 1) = \tfrac{1}{2} \cdot 9r_i(r_i - 1) + 3r_i$$

Doppeltangentialebenen; somit zählen alle $3r_i$-fachen Tangentialebenen φ_i^0, $i = 1, 2, \ldots, \varrho$, des Kegels Γ^0 für

$$9 \Sigma \tfrac{1}{2} r_i(r_i - 1) + 3 \Sigma r_i = 9 \cdot \tfrac{1}{2}(n - 1)(n - 2) + 3 \cdot 3(n - 1) = \tfrac{3}{2} n(n - 1) = \vartheta$$

Doppeltangentialebenen, wie aus den Relationen (II) und (III) in Nr. 1 folgt.

Im Falle der Jonquièresschen Verwandtschaften besitzt Γ^0 (s. Nr. 1) eine $3(n - 1)$-fache Tangentialebene φ_{n-1}^0 und $2(n - 1)$ dreifache Tangentialebenen $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \ldots$ Diese vielfachen Elemente sind also den

$$\tfrac{1}{2}(3n - 3)(3n - 2) + 2(n - 1) \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = \tfrac{3}{2} n(n - 1) = \vartheta$$

Doppeltangentialebenen äquivalent.

Die betrachtete Kegelfläche $(3n + 1)$. Klasse Γ^0, mit ϑ Doppeltangentialebenen, ist daher $12n$. Ordnung und $3n$. Geschlechts.

Ganz analog können wir beweisen, daß die Ebenen $\alpha_\iota, \beta_\iota, \ldots$ $(\iota = 1, 2, 3)$ des Bündels (W_ι) eine Kegelfläche Γ^ι $(n + 3)$. Klasse, $4(2n + 1)$. Ordnung und $3n$. Geschlechts erzeugen. Jede s_k-fache Hauptebene φ_k^ι des Bündels (W_ι) ist eine s_k-fache Tangentialebene des Γ^ι. Im Falle der Jonquièresschen Verwandtschaften besitzt Γ^ι eine $(n - 1)$-fache Tangentialebene φ_{n-1}^ι.

Zu diesem Zwecke müssen wir in (W_ι) eine beliebige Gerade d_ι annehmen und die projektiven Ebenenbüschel

$$(\Delta_0^n) \barwedge (d_1) \barwedge (d_2) \barwedge (d_3)$$

betrachten. Liegt d_ι auf der s_k-fachen Hauptebene φ_k^ι, so erhalten wir projektive Ebenenbüschel

$$(\Delta_0^{n-s_k}) \barwedge (d_1) \barwedge (d_2) \barwedge (d_3)$$

und den der Ebene φ_k^ι in (W_0) zugeordneten Tangentialebenenbüschel, dessen Träger die Hauptkegelfläche Φ_k^0 ist. Der s_k-fache Punkt $\varphi_k^1 \varphi_k^2 \varphi_k^3$ der Raumkurve R (Nr. 10) enthält s_k Quadrupel homologer Ebenen (nämlich die s_k aus diesem Punkte an Φ_k^0 gelegten Tangentialebenen und $\varphi_k^1, \varphi_k^2, \varphi_k^3$). Es gehen also durch die Gerade d_ι außer den $(n - s_k) + 1 + 1 + 1$ Tangentialebenen des Kegels Γ^ι noch s_k weitere Tangentialebenen, welche mit der Hauptebene φ_k^ι identisch sind. Das Element $\varphi_k^\iota (\iota = 1, 2, 3)$ ist daher eine *s_k-fache Tangentialebene* der Kegelfläche Γ^ι, w. z. b. w.

[1]) R. Sturm, l. c. Bd. I. Nr. 177.

Den Kegel Γ^ι können wir auch folgendermaßen erhalten. Der vorher konstruierten Kegelfläche Γ^0 des Bündels (W_0) entspricht im (W_ι) — vgl. die Relationen (I), (IV), (II) in Nr. 1 und die Werte $\nu = 3n + 1$, $l_i = 3r_i$ — eine Kegelfläche Γ^ι von der Klasse

$$\nu n - \Sigma l_i r_i = \nu n - 3\Sigma r_i^2 = (3n + 1)\, n - 3\,(n^2 - 1) = n + 3\,,$$

für welche die s_k-fache Hauptebene φ_k^ι eine Tangentialebene mit der Multiplizität

$$\nu s_k - \Sigma l_i \mu_{ik}^0 = \nu s_k - 3\Sigma r_i \mu_{ik}^0 = (3n + 1)s_k - 3n\, s_k = s_k$$

ist. Weil aber alle Ebenen φ_k^ι, $k = 1, 2, \ldots, \sigma$, der Kegelflächen Γ^ι den

$$\Sigma \tfrac{1}{2} s_k(s_k - 1) = \tfrac{1}{2}\,(n - 1)(n - 2) = \vartheta_1$$

Doppeltangentialebenen äquivalent sind, so ist bekanntlich diese Kegelfläche $4(2n + 1)$. Ordnung und $3n$. Geschlechts.

Es gelten daher folgende Sätze:

Sind $A = \alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, $B = \beta_0\beta_1\beta_2\beta_3, \ldots$ *die sämtlichen Punkte der Raumkurve* R $3(n + 1)$. Ordnung, $3(9n + 1)$. Klasse, $4(3n + 1)$. Rangs und $3n$. Geschlechts, welche das Erzeugnis (vgl. Nr. 10) der Ebenenbündel (W_0) und (W_ι) $(\iota = 1, 2, 3)$ ist, *so erzeugen*:

a) *die Ebenen* $\alpha_0, \beta_0, \ldots$ *des Bündels* (W_0) *eine Kegelfläche* Γ^0 $(3n + 1)$. *Klasse,* $12n$. *Ordnung und* $3n$. *Geschlechts, die jede* r_i*-fache Hauptebene* φ_i^0 *dieses Bündels zu einer* $3r_i$*-fachen Tangentialebene besitzt.*

b) *die Ebenen* $\alpha_\iota, \beta_\iota, \ldots (\iota = 1, 2, 3)$ *des Bündels* (W_ι) *eine Kegelfläche* Γ^ι $(n + 3)$. *Klasse,* $4(2n + 1)$. *Ordnung und* $3n$. *Geschlechts, die jede* s_k*-fache Hauptebene* φ_k^ι *dieses Bündels zu einer* s_k*-fachen Tangentialebene besitzt.*

Anmerkung: Sind Jonquièressche Verwandtschaften n. Grades festgestellt, so besitzt: a) die Kegelfläche Γ^0 eine $3(n - 1)$-fache Tangentialebene und $2(n - 1)$ dreifache Tangentialebenen; b) die Kegelfläche Γ^ι eine $(n - 1)$-fache Tangentialebene.

Diesen Sätzen sind dual ganz analoge Sätze für die (Nr. 10) Torsusfläche $3(n + 1)$. Klasse zugeordnet.

Aus der [1,1]-deutigen Korrespondenz — vgl. die Relation (8) in Nr. 10 — zwischen den Punkten $A, B, \ldots$ der Raumkurve R und den Tangentialebenen $\alpha_0, \beta_0, \ldots$ (bzw. $\alpha_\iota, \beta_\iota, \ldots$) des Kegels Γ^0 (bzw. Γ^ι) vom $3n$. Geschlecht folgt — nach dem Grundsatze von Clebsch — daß die in Nr. 10 untersuchte *Raumkurve* R *vom Geschlecht* $3n$ *ist*, w. z. b. w.

Es soll noch bemerkt werden, daß zwischen den Tangentialebenen:

a) α_1 und α_2, β_1 und $\beta_2, \ldots$ der Kegel Γ^1 und Γ^2
b) α_2 „ α_3, β_2 „ $\beta_3, \ldots$ „ „ Γ^2 „ Γ^3
c) α_3 „ α_1, β_3 „ $\beta_1, \ldots$ „ „ Γ^3 „ Γ^1

[1,1]-deutige Korrespondenzen bestehen. Diese Trägerkegelflächen sind $(n + 3)$. Klasse, und die Punkte $A = \alpha_1\alpha_2\alpha_3$, $B = \beta_1\beta_2\beta_3, \ldots$ gehören[1]) einer Raumkurve $3(n + 3)$. Ordnung an. Es gibt aber 6 Geraden, in denen sich[2]) je drei homologe Ebenen der kollinearen Bündel (W_1), (W_2) und (W_3) schneiden. Die erhaltene Raumkurve zerfällt in diese 6 Geraden und in eine Raumkurve $3(n + 1)$. Ordnung R, denn jeder ihrer Punkte $A = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ enthält bekanntlich vier homologe Ebenen der Bündel (W_0) und (W_ι) $(\iota = 1, 2, 3)$.

Analoge Korrespondenzen bestehen für die Kegelflächen Γ^0, Γ^1 und Γ^2. Sie führen zur Raumkurve $3(n + 1) + (n + 3) + (n + 3) = (5n + 7)$. Ordnung. Es gibt aber

---

[1]) R. Sturm, l. c. Bd. I. Nr. 177.

[2]) Schröter in Crelles Journal **62** (1863), S. 270.

$2(n+2)$ Geraden, in denen sich [1]) je drei homologe Ebenen der Bündel (W_0), (W_1) und (W_2) — welche der Relation (8) in Nr. 10 genügen — schneiden. Die erhaltene Raumkurve zerfällt in diese $2(n+2)$ Geraden und in die durch Punkte $A = \alpha_0\alpha_1\alpha_2 = \alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \ldots$ erzeugte Raumkurve R $3(n+1)$. Ordnung.

12. *Eigenschaften von fünf Ebenenbündeln* (bzw. Punktfeldern). Betrachtet man (vgl. Nr. 2) fünf Ebenenbündel

$$(9) \qquad (W_1)\varkappa(W_2)\varkappa(W_3)\varkappa(W_4), \quad (W_0)\pi^n(W_\iota) \qquad (\iota = 1, 2, 3, 4),$$

deren Scheitelpunkte voneinander verschieden sind, so kann man fragen, wie oft fünf homologe Ebenen dieser Bündel sich in je einem Punkte schneiden.

Gegeben sind solche homologe Ebenen der Bündel (W_0), (W_1), (W_2) und (W_3), welche sich in Punkten $A = \alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \ldots$ einer (Nr. 10) Raumkurve $3(n+1)$. Ordnung R schneiden. Die Ebenen $\alpha_1, \ldots$ des Bündels (W_1) erzeugen (Nr. 11) eine Kegelfläche Γ^1 $(n+3)$. Klasse. Die homologen Ebenen $\alpha_4, \ldots$ des Bündels (W_4) erzeugen, wie aus der Kollineation (W_1) $\varkappa(W_4)$ folgt, auch eine Kegelfläche Γ^4 von der Klasse $n+3$. Aus (9) ergibt sich aber eine Korrespondenz $[1, 1]$ zwischen den Punkten $A = \alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \ldots$ der Raumkurve R und den Tangentialebenen $\alpha_4, \ldots$ des Kegels Γ^4, und es fällt [2]) $3(n+1) + (n+3) = 2(2n+3)$-mal ein Punkt $B = \beta_0\beta_1\beta_2\beta_3$ der R in die entsprechende Tangentialebene β_4 des Γ^4. Die gegebenen Bündel besitzen daher $2(2n+3)$ Quintupel homologer Ebenen, die sich in je einem Punkte schneiden.

Es ergeben sich die dual entsprechenden Sätze:

Sind zwischen dem Ebenenbündel (W_0) und jedem von den vier kollinearen Ebenenbündeln (W_ι) $\iota = 1, 2, 3, 4$ — deren Scheitelpunkte beliebig und voneinander verschieden sind — *Cremonasche Verwandtschaften n. Grades festgestellt, so schneiden sich $2(2n+3)$-mal fünf homologe Ebenen dieser Bündel in je einem Punkte.*

Sind zwischen dem Punktfelde (ω_0) und jedem von den vier kollinearen Punktfeldern (ω_ι), $\iota = 1, 2, 3, 4$, — deren Trägerebenen beliebig und voneinander verschieden sind — *Cremonasche Verwandtschaften n. Grades festgestellt, so liegen $2(2n+3)$-mal fünf homologe Punkte dieser Felder in je einer Ebene.*

---

[1]) Diesen Satz werde ich in einer anderen (vgl. S. 187. Amerkung 1) Abhandlung beweisen.

[2]) R. Sturm, l. c. Bd. I. Nr. 177.

Eingegangen 12. Dezember 1932.